CALCUL DIFFERENTIEL

I – Etude locale

1) Dérivabilité en un point

Définition : Une fonction *f*, définie en *a* et au voisinage de *a*, est dérivable en *a* si son taux d'accroissement, c'est-à-dire le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, admet une limite réelle quand *x* tend vers *a*. Cette limite est appelée nombre dérivé de *f* en *a* et notée $f'(a)$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple : $f(x)=x^2+x+2$ au point $a=1$. Donc $f(a)=4$.

$f(x)-f(1)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Donc la fonction *f* est dérivable en 1 et son nombre dérivé est $f'(1)=3$.

Remarque : Avec l'autre expression, on trouve le même résultat :

$f(1+h)=(1+h)^2+(1+h)+2=h^2+3h+4$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+3)=3$.

Autres exemples : Plus généralement, on retrouve toutes les dérivées usuelles.

On suppose que la fonction f est dérivable en *a*, donc $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On peut remarquer que si l'on pose $\varepsilon(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$, alors $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. Et $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$.

Théorème : Si une fonction *f* est dérivable en *a*, alors il existe un voisinage *V* de 0 et une fonction ε définie sur *V* tels que :

$$\forall h\in V \quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$. Donc $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Théorème : Si une fonction *f* est dérivable en *a*, alors *f* est continue en *a*.

Remarque : Toute fonction dérivable en *a* est continue en *a*. Mais la réciproque est fausse : une fonction peut être continue en *a*, mais pas dérivable en *a*.

Exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=0$. Elle est continue, mais pas dérivable :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f(0) \text{ mais : } \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

2) Développement limité d'ordre 1

On remarque de plus que si *f* est dérivable en *a*, $h\mapsto f(a)+hf'(a)$ est un polynôme du premier degré et que $h\varepsilon(h)$ est produit de deux termes qui tendent vers 0, donc est négligeable devant les termes de ce polynôme.

Définition : Une fonction f définie sur un voisinage V de 0 admet en 0 un développement limité d'ordre 1 s'il existe un polynôme P avec $d°P\le 1$ et une fonction ε tels que : $\forall x\in V \quad f(x)=P(x)+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

<u>Définition</u> : Une fonction f définie sur un voisinage V de a admet en a un développement limité d'ordre 1 s'il existe un polynôme P avec $d°P \le 1$ et une fonction ε tels que : $\forall x \in V \quad f(x) = P(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

En posant $h = x - a$, c'est équivalent à : $f(a+h) = P(h) + h\varepsilon(a+h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(a+h) = 0$.

Donc les deux phrases suivantes sont équivalentes :

- f admet en a un développement limité d'ordre 1.
- la fonction $x \mapsto f(a+x)$ admet en 0 un développement limité d'ordre 1.

On peut remarquer que si f est dérivable en a, alors f admet un développement limité d'ordre 1.

Réciproquement, si f admet en a un développement limité d'ordre 1 : il existe deux réels α et β, et une fonction ε tels que : $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Pour $x = a$: $f(a) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = \beta$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = \beta$.

<u>Théorème</u> : Une fonction f définie au voisinage de a admet en a un développement limité d'ordre 1 si et seulement si f est dérivable en a. Il s'écrit :

- soit $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.
- soit $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Dans le cas des fonctions usuelles en 0, on obtient :

<u>Développements limités usuels en 0</u> :

Si f est dérivable en 0 : $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x) \qquad e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\varepsilon(x)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + x\varepsilon(x) \qquad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x) \qquad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x\varepsilon(x)$

$\sin x = x + x\varepsilon(x) \qquad \cos x = 1 + x\varepsilon(x) \qquad \tan x = x + x\varepsilon(x)$

Cela permet de rédiger différemment certaines recherches de limites.

<u>*Exemple*</u> : Pour trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4} - 2}{3 - \sqrt{2x+9}}$, on peut remarquer que :

$$\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{1 + \frac{3}{4}x} = 2\left[1 + \frac{3}{8}x + x\varepsilon_1(x)\right] = 2 + \frac{3}{4}x + 2x\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\sqrt{2x+9} = 3\sqrt{1 + \frac{2}{9}x} = 3\left[1 + \frac{1}{9}x + x\varepsilon_2(x)\right] = 3 + \frac{1}{3}x + 3x\varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4} - 2}{3 - \sqrt{2x+9}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{4}x + 2x\varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{3}x - 3x\varepsilon_2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{3}{4} + 2\varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{3} - 3\varepsilon_2(x)} = -\dfrac{9}{4}$

On peut aussi raisonner sur des équivalents : $\boxed{f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} (x-a)f'(a) \text{ si } f'(a) \ne 0}$

Donc $\sqrt{x} - \sqrt{a} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$. Donc $\sqrt{3x+4} - \sqrt{4} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{4}}(3x)$ car $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$.

Donc : $\sqrt{3x+4} - 2 \underset{0}{\sim} \dfrac{3}{4}x$ et de même $\sqrt{2x+9} - 3 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3}x$. Donc $\dfrac{\sqrt{3x+4} - 2}{3 - \sqrt{2x+9}} \underset{0}{\sim} -\dfrac{9}{4}$.

En économie ou en physique, on utilise aussi des approximations du genre : pour h suffisamment petit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

3) Dérivabilité à gauche et à droite

Définition : Une fonction f est dérivable à gauche (respectivement à droite) de a si son taux d'accroissement admet en a une limite réelle à gauche (respectivement à droite).

On note $f'_g(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple : $f(x) = x|x-2|$ en 2. Donc $f'_g(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(-x) = -2$.

Et : $f'_d(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} x = 2$.

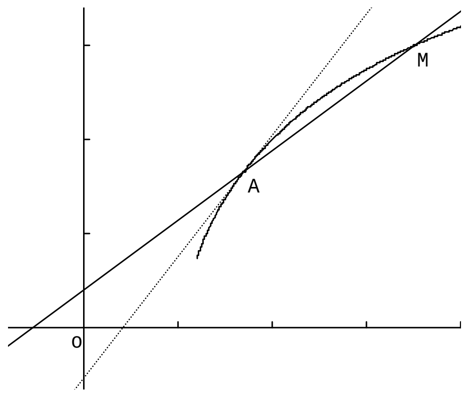
Théorème : Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple : $f(x) = |x|$. Elle est continue, mais pas dérivable : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$.

Elle est dérivable à gauche et à droite de 0, mais pas en 0 car $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

4) Interprétation géométrique



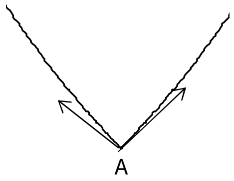
Soit f une fonction définie en a et au voisinage de a. Sur sa courbe représentative (C), on considère les points A d'abscisse a et M d'abscisse x que l'on suppose distinct de a.
La droite (AM) a pour coefficient directeur $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Lorsque x tend vers a, M se rapproche de A et si f est dérivable en a, le quotient ci-dessus a une limite $m = f'(a)$, la droite (AM) se rapproche de la droite (T) de coefficient directeur m qui passe par A. Cette droite est la tangente en A à la courbe. Son équation est : $y = m(x-a) + f(a)$.

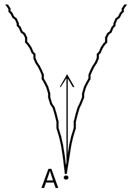
Théorème : Si la fonction f est dérivable en a, alors sa courbe représentative admet au point d'abscisse a une tangente d'équation : $y = (x-a)f'(a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2 + x + 2$ au point $a = 1$. On a vu que $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$.
Donc, l'équation de la tangente à la courbe en $A(1,3)$ est $y = 3(x-1)+4$, donc $y = 3x+1$.
Si le quotient a une limite infinie, la droite (AM) se rapproche de la droite verticale qui passe par A. La courbe a une tangente verticale en A. Mais f n'est pas dérivable.
Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ en 0.
Si le quotient a une limite à gauche et une limite à droite différentes, la courbe admet deux « demi-tangentes », l'une à droite et l'autre à gauche, différentes. On dit que la courbe admet un point anguleux.
Exemple : $f(x) = x|x-2|$ en 2.

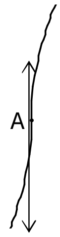
Si les deux demi-tangentes sont verticales, elles peuvent soit être confondues (point de rebroussement : $f(x) = \sqrt{|x|}$), soit être opposées (point d'inflexion : $f(x) = \sqrt[3]{x}$).



Point anguleux



Point de rebroussement



Point d'inflexion

<u>II – Etude globale</u>

1) <u>Dérivabilité sur un intervalle</u>

<u>Définition</u> : Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point a de l'intervalle I. La fonction dérivée de f est la fonction f' qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé en x : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Il faut évidemment que f soit définie sur tout l'intervalle I, c'est-à-dire $I \subset D_f$.

<u>Notation</u> : La fonction dérivée se note aussi $\dfrac{df}{dx}$, ce qui conduit à écrire $df = f'(x)dx$.

Cette notation est introduite surtout en vue de l'économie. Elle ne sera guère utilisée en maths, mais justifie un peu l'écriture des intégrales.

<u>Dérivées usuelles</u> :

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	sur $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	sur $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	sur $D_f = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boxed{\text{sur } D_f - \{0\} =]0,+\infty[}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	sur $D_f =]0,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	sur $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	sur $D_f =]0,+\infty[$ si $\alpha < 1$
		sur $D_f = [0,+\infty[$ si $\alpha > 1$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	sur $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	sur $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \text{cotan}\, x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2\, x$	sur $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \text{Arccos}\, x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\boxed{\text{sur } D_f - \{-1,1\} =]-1,1[}$
$f(x) = \text{Arcsin}\, x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\boxed{\text{sur } D_f - \{-1,1\} =]-1,1[}$
$f(x) = \text{Arctan}\, x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	sur $D_f = \mathbb{R}$

On peut remarquer que toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ (avec $0 < \alpha < 1$) qui n'est pas dérivable en 0, la fonction $x \mapsto |x|$ car $|x| = \sqrt{x^2}$, et les fonctions Arcsinus et Arccosinus.

La formule de la dérivée de $x \mapsto x^{\alpha}$ génère toutes les dérivées des fonctions $x \mapsto x^n$ bien sûr, mais aussi $x \mapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$.

<u>Opérations algébriques</u> : Si u et v sont dérivables sur un intervalle I :

$$(u+v)' = u'+v' \qquad (ku)' = ku' \qquad (uv)' = u'v+v'u \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

<u>Démonstration</u> : u et v sont dérivables en $x \in I$, donc $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + h\varepsilon_1(h)$ et $v(x+h) = v(x) + hv'(x) + h\varepsilon_2(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$

- Si $f = u+v$: $f(x) = u(x)+v(x)$ et $f(x+h) = u(x+h)+v(x+h)$.

  Donc : $f(x+h) = \underbrace{u(x)+v(x)}_{f(x)} + h[u'(x)+v'(x)] + h[\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)]$

  Or $\lim\limits_{h\to 0}[\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)] = 0$. Donc f admet un $DL_1(x)$, donc f est dérivable en x et $f'(x) = u'(x)+v'(x)$ pour tout x. Donc $f' = u'+v'$.
- Si $f = ku$ (où k est une constante) : $f(x) = ku(x)$ et $f(x+h) = ku(x+h)$

  Donc : $f(x+h) = ku(x) + khu'(x) + kh\varepsilon_1(h)$. Or $\lim\limits_{h\to 0} k\varepsilon_1(h) = 0$. Donc f admet un $DL_1(x)$, donc f est dérivable en x et $f'(x) = ku'(x)$ pour tout x. Donc $f' = u'+v'$.
- Si $f = uv$: $f(x) = u(x)v(x)$ et $f(x+h) = u(x+h)v(x+h)$. Donc :

  $f(x+h) = \underbrace{u(x)v(x)}_{f(x)} + h[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)] + h[u(x)\varepsilon_2(h)+v(x)\varepsilon_1(h)+h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)]$

  Or $\lim\limits_{h\to 0}[u(x)\varepsilon_2(h)+v(x)\varepsilon_1(h)+h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)] = 0$. Donc f admet un $DL_1(x)$, donc f est dérivable en x et $f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ pour tout x. Donc $f' = u'v+uv'$.
- Si $f = \dfrac{1}{v}$: $f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{v(x+h)} - \dfrac{1}{v(x)} = \dfrac{v(x)-v(x+h)}{v(x)\times v(x+h)}$.

Donc : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\dfrac{1}{v(x)\times v(x+h)} \times \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$.

La fonction v est dérivable, donc continue. Donc : $\lim\limits_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$.

Donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\dfrac{v'(x)}{[v(x)]^2}$. Donc $f' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

- Si $f = \dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, alors : $f' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v} - \dfrac{uv'}{v^2} = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

<u>Composition</u> : Si u est dérivable sur I et v sur $u(I)$: $(v\circ u)' = u' \times (v'\circ u)$

En particulier : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\qquad (e^u)' = u'e^u$ $\qquad (u^{\alpha})' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

$$(\cos u)' = -u'\sin u \qquad (\sin u)' = u'\cos u \qquad (\tan u)' = u'(1+\tan^2 u)$$

$$(\mathrm{Arc}\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\mathrm{Arc}\cos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\mathrm{Arc}\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

u est dérivable en x donc : $u(x+h)=u(x)+hu'(x)+h\varepsilon_1(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$.

Or si $f=v\circ u$: $f(x)=v[u(x)]$ et $f(x+h)=v[u(x+h)]$.

Donc $f(x+h)=v[u(x)+hu'(x)+h\varepsilon_1(h)]=v[u(x)+H]$ et $\lim\limits_{h\to 0}H=0$

Or v est dérivable en $u(x)$. Donc : $v[u(x)+H]=v[u(x)]+Hv'[u(x)]+H\varepsilon_2(H)$ avec $\lim\limits_{H\to 0}\varepsilon_2(H)=0$, et donc par composition $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2(H)=0$.

Donc : $f(x+h)=\underbrace{v[u(x)]}_{f(x)}+hu'(x)v'[u(x)]+h[\varepsilon_1(h)+u'(x)\varepsilon_2(H)+\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(H)]$

De plus : $\lim\limits_{h\to 0}[\varepsilon_1(h)+u'(x)\varepsilon_2(H)+\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(H)]=0$.

Donc f admet un $DL_1(x)$, donc f est dérivable en x et $f'(x)=u'(x)v'[u(x)]$ pour tout x. Donc $f'=u'(v'\circ u)$.

Les autres formules sont des applications :

- Si $v(x)=\sqrt{x}$, alors $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc si $f=\sqrt{u}$, alors $f'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\times u'$.
- Si $v(x)=\ln x$, alors $v'(x)=\dfrac{1}{x}$. Donc si $f=\ln u$, alors $f'=\dfrac{1}{u}\times u'$.
- Si $v(x)=e^x$, alors $v'(x)=e^x$. Donc si $f=e^u$, alors $f'=e^u\times u'$.
- Si $v(x)=x^\alpha$, alors $v'x)=\alpha x^{\alpha-1}$. Donc si $f=u^\alpha$, alors $f'=\alpha u^{\alpha-1}\times u'$.
- Si $v(x)=\cos x$, alors $v'(x)=-\sin x$. Donc si $f=\cos u$, alors $f'=-u'\sin u$.
- Si $v(x)=\sin x$, alors $v'(x)=\cos x$. Donc si $f=\sin u$, alors $f'=u'\cos u$.
- Si $v(x)=\tan x$, alors $v'(x)=1+\tan^2 x$. Donc si $f=\tan u$, alors $f'=u'(1+\tan^2 u)$.
- Si $v(x)=\text{Arcsin}\,x$, alors $v'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc si $f=\text{Arcsin}\,u$, alors $f'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
- Si $v(x)=\text{Arccos}\,x$, alors $v'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc si $f=\text{Arccos}\,u$, alors $f'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
- Si $v(x)=\text{Arctan}\,x$, alors $v'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Donc si $f=\text{Arctan}\,u$, alors $f'=\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Exemple 1 : $f(x)=(x^2+1)^7$. Donc $f'(x)=7\times 2x\times(x^2+1)^6=14x(x^2+1)^6$.

Exemple 2 : $f(x)=e^{1/x}$. Donc $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$.

Exemple 3 : $f(x)=\ln(|x|)$. Si $x>0$, $f(x)=\ln x$, donc $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Si $x<0$, $f(x)=\ln(-x)$, donc $f'(x)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$. On trouve le même résultat.

Donc si $f=\ln(|u|)$, alors $f'=\dfrac{u'}{u}$. On n'a pas besoin d'étudier le signe de u.

Fonction réciproque d'une fonction dérivable : Si f est dérivable sur un intervalle I et si f est bijective de I dans $f(I)$, alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur l'ensemble $f(I)-\{f(x)/f'(x)=0\}$ et : $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Démonstration : Soient $a\in f(I)$ et $x\in f(I)$. Soient $b=f^{-1}(a)$ et $y=f^{-1}(x)$ qui appartiennent donc à l'intervalle I. Donc : $a=f(b)$ et $x=f(y)$.

Donc : $\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}=\dfrac{y-b}{f(y)-f(b)}$.

La fonction *f* est continue sur *I*, donc f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} f^{-1}(x)=f^{-1}(a)$. Et donc : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}=\lim\limits_{y\to b}\dfrac{y-b}{f(y)-f(b)}$.

Or *f* est dérivable sur *I*, donc en *b* : $\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(y)-f(b)}{y-b}=f'(b)$ est un réel.

Donc si $f'(b)\neq 0$: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a}=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$.

Donc f^{-1} est dérivable en tout point *a* tel que $f'(b)\neq 0$, c'est-à-dire tel que $f'[f^{-1}(a)]\neq 0$. Il faut donc enlever les images par f^{-1} des zéros de la dérivée f'.

<u>Remarque</u> : Les courbes de *f* et de f^{-1} étant symétriques par rapport à la première bissectrice, les points à tangente horizontale de la courbe de *f* se transforment en points à tangente verticale de la courbe de f^{-1}.

<u>*Exemple 1*</u> : La fonction *f* définie par $f(x)=\ln x$ sur $]0,+\infty[$ est dérivable et bijective de $I=]0,+\infty[$ dans $f(I)=\mathbb{R}$, et $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Donc sa réciproque définie par $f^{-1}(x)=e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1/e^x}=e^x$.

<u>*Exemple 2*</u> : La fonction *f* définie par $f(x)=x^2$ sur $[0,+\infty[$ est dérivable et bijective de $I=[0,+\infty[$ dans $f(I)=[0,+\infty[$. Sa dérivée est $f'(x)=2x$. Donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Donc sa réciproque définie par $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ est dérivable sur $f(I)-\{f(0)\}=]0,+\infty[$ et : $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{2f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

<u>*Exemple 3*</u> : La fonction *f* définie par $f(x)=\cos x$ sur $[0,\pi]$ est dérivable et bijective de $I=[0,\pi]$ dans $f(I)=[-1,1]$. Sa dérivée est $f'(x)=-\sin x$. Donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pi$. Donc sa réciproque définie par $f^{-1}(x)=\text{Arccos}\, x$ est dérivable sur $f(I)-\{f(0),f(\pi)\}=]-1,1[$ et $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{-\sin[\text{Arccos}\, x]}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Théorème</u> : Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

2) <u>Extremum local d'une fonction</u>

<u>Rappel</u> : Une fonction définie sur un intervalle *I* admet en $a\in I$:
- un maximum local s'il existe un voisinage *V* de *a* tel que $\forall x\in V \quad f(x)\leq f(a)$.
- un minimum local s'il existe un voisinage *V* de *a* tel que $\forall x\in V \quad f(x)\geq f(a)$.

Un extremum local est un minimum local ou maximum local.
Ils sont absolus si la propriété est vraie sur $V=I$.

Ces extremums locaux peuvent être atteints soit aux bornes de l'intervalle, soit à l'intérieur de l'intervalle. On va s'intéresser à ceux qui sont intérieurs.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une fonction dérivable sur un intervalle *I* et si *f* admet un extremum local en un point *a* de *I* qui n'est pas une extrémité de *I*, alors $f'(a)=0$.

<u>Démonstration</u> : Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un maximum.

Donc il existe un voisinage $V =]a-\alpha, a+\alpha[$ tel que $\forall x \in V \quad f(x) \leq f(a)$.

De plus la fonction f est dérivable en a, donc $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$.

Or $\forall x \in]a-\alpha, a[\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Donc $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Donc $f'(a) \geq 0$.

Et $\forall x \in]a, a+\alpha[\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Donc $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Donc $f'(a) \leq 0$.

Donc $f'(a) = 0$.

<u>Remarque 1</u> : La condition $f'(a) = 0$ est nécessaire mais pas suffisante. car si on considère $f(x) = x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un maximum.

<u>Remarque 2</u> : Le résultat est faux si a est une extrémité de l'intervalle car on ne peut pas comparer le signe à gauche et à droite. Lorsque l'on cherche les extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle quelconque, on les cherche donc parmi les zéros de la dérivée et les extrémités de l'intervalle.

3) <u>Accroissements finis</u>

L'idée est d'exploiter le lien entre le taux d'accroissement et la dérivée.

<u>Théorème de Rolle</u> : Si une fonction f continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a,b[$ vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>Démonstration</u> : f est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée : $f([a,b]) = [m, M]$.

Si $m = M$, alors f est constante et : $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0$. Tout c convient.

Si $m \neq M$, l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$, par exemple M. Or $M \in f([a,b])$, donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $M = f(c)$. Et $f'(c) = 0$ car f passe par un maximum en c qui est un point intérieur.

<u>Interprétation géométrique</u> : Il existe au moins un point à tangente horizontale.

<u>*Exemple*</u> : Entre deux racines distinctes d'un polynôme P, le polynôme dérivé s'annule au moins une fois. Donc si un polynôme P de degré n a n racines distinctes, son polynôme dérivé a au moins $(n-1)$ racines distinctes, et comme $d°P' = n-1$, il a exactement $(n-1)$ racines distinctes. Donc P' s'annule une fois et une seule entre deux racines de P.

<u>Egalité des accroissements finis</u> : Si une fonction f continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

L'égalité est équivalente à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

<u>Interprétation géométrique</u> : Il existe au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle à la corde (AB).

<u>Démonstration</u> : Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et elle vérifie $g(a) = g(b) = f(a)$.

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Donc : $\exists c \in]a,b[\quad f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

<u>*Exemple*</u> : Si $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, alors $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.

Pour tous réels a et b, il existe c tel que : $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

Or $f(b) - f(a) = \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (b-a)[\alpha(b+a) + \beta] = (b-a)\left[2\alpha \dfrac{b+a}{2} + \beta\right]$.

Donc ici : $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Remarque : Le problème, c'est que le plus souvent on connaît l'existence de *c* mais on ne sait pas le calculer, et d'ailleurs il n'est pas unique. Cependant, cette formule va permettre d'utiliser les propriétés de f' pour déterminer des propriétés de *f*.

Première inégalité des accroissements finis : Soit *f* une fonction continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a,b[$. Si sa dérivée est bornée, c'est-à-dire s'il existe deux réels *m* et *M* tels que $\forall x \in]a,b[\quad m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis et d'écrire l'inégalité : $m \leq f'(c) \leq M$. Alors $m \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$

Exemple : $f(x) = \ln x$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc : $\forall x \in]a,b[\quad \dfrac{1}{b} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{a}$.

Donc : $\dfrac{b-a}{b} \leq \ln b - \ln a \leq \dfrac{b-a}{a}$.

Remarque : La condition $a < b$ est essentielle car on multiplie l'inégalité par $(b-a)$.
Or par exemple pour les suites, on ne connaît pas toujours l'ordre de *a* et *b*.

Deuxième inégalité des accroissements finis : Si *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I* et s'il existe un réel *k* tel que $\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq k$, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b-a|.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis entre *a* et *b*, et d'écrire l'inégalité : $|f'(c)| \leq k$. Alors $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq k$.

Remarque : Cette deuxième inégalité est utilisée dans l'étude des suites récurrentes.
Une autre conséquence est le théorème de prolongement de la dérivée :

Définition : Une fonction *f* est de classe C^1 sur un intervalle *I* si elle est dérivable sur *I* et si sa dérivée est continue sur *I*.

On verra plus tard une généralisation de cette définition.

Théorème « de prolongement de la dérivée » :
Soit une fonction *f* continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b]$.

- Si sa dérivée f' admet une limite réelle ℓ en *a*, alors *f* est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f'(a) = \ell$.
- Si sa dérivée f' admet une limite infinie en *a*, alors *f* n'est pas dérivable en *a*, mais sa courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse *a*.

Démonstration : Pour tout $x \in]a,b]$, la fonction *f* est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$. Donc d'après la formule des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Quand *x* tend vers *a*, c_x tend vers *a* car $a < c_x < x$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{y\to a} f'(y)$.

Si $\lim\limits_{y\to a} f'(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Donc *f* est dérivable en *a* et $f'(a) = \ell$.

Donc la dérivée f' est continue en *a*, et *f* est de classe C^1 sur $[a,b]$.

Si $\lim\limits_{y\to a} f'(y)=\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$. Donc f n'est pas dérivable en a et sa courbe a une tangente verticale au point d'abscisse a.
C'est évidemment la même chose en b sur un intervalle $[a,b[$.

<u>*Exemple*</u> : $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$: $f'(x)=2x\ln x+x$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$ (réel). Donc f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et $f'(0)=0$.

<u>*Exemple*</u> : $f(x)=x\ln x$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$: $f'(x)=\ln x+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$ (réel). Donc en O, la tangente est verticale.

<u>Remarque</u> : Si la dérivée n'a pas de limite, cela ne veut pas dire que f n'est pas dérivable. Par exemple la fonction définie par $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ est continue et dérivable en 0 : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Pourtant sa dérivée $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

4) <u>Sens de variations</u>

<u>Rappel</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est croissante sur I si pour tous a et b de I : $a\le b \Rightarrow f(a)\le f(b)$.
f est décroissante sur I si pour tous a et b de I : $a\le b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$.
f est monotone sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Une fonction croissante sur I est une fonction qui conserve le sens des inégalités, alors qu'une fonction décroissante est une fonction qui change le sens des inégalités.
Lorsque la fonction est dérivable, on a la caractérisation suivante :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- la fonction f est constante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)=0$.
- la fonction f est croissante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)\ge 0$.
- la fonction f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x\in I \quad f'(x)\le 0$.

<u>Démonstration</u> : On démontre la deuxième équivalence.

- Supposons f croissante sur I. Donc : $\forall x\neq a \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0$. Donc $f'(a)\ge 0$ pour tout $a\in I$.
- Réciproquement, supposons que $\forall x\in I \quad f'(x)\ge 0$.

  Soit $(a,b)\in I^2$ tel que $a\le b$. D'après la formule des accroissements finis, il existe $c\in I$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. Or $b-a\ge 0$ et $f'(c)\ge 0$.
  Donc $f(b)-f(a)\ge 0$. Donc $f(a)\le f(b)$.

La troisième équivalence se démontre de la même manière.
La première est évidente : f est constante ssi elle est croissante et décroissante.
Pour le théorème de la bijection, on a besoin de la stricte monotonie :

<u>Rappel</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
f est strictement croissante sur I si pour tous a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
f est strictement décroissante sur I si pour tous a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
f est strictement monotone sur I si elle est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

Cela élimine les fonctions constantes sur un intervalle contenu dans I.
Si la fonction est dérivable, on a la caractérisation suivante :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
Si $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Il n'y a pas équivalence car par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

<u>Théorème</u> : Une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement monotone si et seulement si sa dérivée garde un signe constant et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur l'intervalle I.

En fait, il ne faut pas qu'elle s'annule sur un intervalle inclus dans I.
Pour les extremums locaux, lorsque la fonction est dérivable :

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.
La fonction f admet un extremum local en a si et seulement si sa dérivée s'annule en a en changeant de signe.

Attention ! Ce théorème est faux si l'intervalle n'est pas ouvert. En effet une borne peut être un extremum sans que la dérivée s'annule.

III – Dérivées successives

1) Définitions

Si la dérivée f' de f est elle même dérivable, on dira que f est dérivable deux fois et on note $(f')' = f''$, si f'' est dérivable, on dit que f est dérivable 3 fois et on note $(f'')' = f^{(3)}$ … et ainsi de suite. On définit ainsi par récurrence la dérivée d'ordre p.

<u>Définition</u> : Par convention : $f^{(0)} = f$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une fonction f est p fois dérivable sur un intervalle I si elle est $(p-1)$ fois dérivable sur I et si $f^{(p-1)}$ est dérivable sur I. Alors sa dérivée d'ordre p est : $f^{(p)} = (f^{(p-1)})'$.
Une fonction f est indéfiniment dérivable sur I si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, elle est p fois dérivable sur I.

<u>Exemple</u> : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Elle est dérivable une fois : $f'(x) = f^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, deux fois : $f^{(2)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$, trois fois : $f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, …

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}^* \ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Initialisation : elle est évidente.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^* \ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n![-(n+1)]x^{-(n+1)-1} = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

On en déduit que f est indéfiniment dérivable.

<u>Opérations algébriques</u> : Si u et v sont dérivables n fois sur I et si k est un réel, alors $u+v$, ku, uv et $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont dérivables n fois sur I.

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} \qquad (ku)^{(n)} = ku^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

<u>Composition</u> : Si u est dérivable n fois sur I et si v est dérivable n fois sur $u(I)$, alors $v \circ u$ est dérivable n fois sur I.

Les deux premières formules sont évidentes.
La formule de Leibniz se démontre par récurrence.
Initialisation : $(uv)^{(0)} = uv = u^{(0)}v^{(0)}$.

Hérédité : Supposons que $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.

Donc :

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)}.$$

Donc : $(uv)^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} u^{(j)} v^{(n+1-j)} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} u^{(j)} v^{(n-j+1)}$ en posant $j = k+1$ dans la première somme et $j = k$ dans la deuxième.

Donc : $(uv)^{(n+1)} = \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} u^{(n+1)} v^{(0)}$.

Or $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Et $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$.

Donc : $(uv)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} u^{(j)} v^{(n+1-j)}$.

Conclusion : La propriété est vraie pour tout n.

2) Classes de fonctions

<u>Définitions</u> : Soit $p \in \mathbb{N}$.
Une fonction f est de classe D^p sur un intervalle I si elle est p fois dérivable sur I.
Une fonction f est de classe C^p sur un intervalle I si elle est p fois dérivable sur I et si sa dérivée $f^{(p)}$ est continue sur I.
Une fonction est de classe C^∞ sur un intervalle I si elle est de classe D^p sur I pour tout entier p, donc si elle est indéfiniment dérivable sur I.

L'ensemble des fonctions de classe D^p, C^p ou C^∞ sur I est noté $D^p(I)$, $C^p(I)$ ou $C^\infty(I)$. Donc par exemple : f est de classe C^p sur I si $f \in C^p(I)$.
Les opérations s'étendent aux classes de fonctions :

<u>Opérations algébriques</u> : Si u et v sont de classe D^p, C^p ou C^∞ sur un intervalle I et si k est un réel, alors les fonctions $u+v$, ku, uv et $\frac{u}{v}$ (si v ne s'annule pas) sont de classe D^p, C^p ou C^∞ sur I.

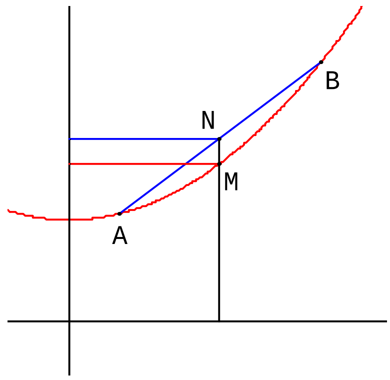
<u>Composition</u> : Si u est de classe D^p, C^p ou C^∞ sur I et si v est de classe D^p, C^p ou C^∞ sur $u(I)$, alors $v \circ u$ est de classe D^p, C^p ou C^∞ sur I.

On en déduit pour les fonctions usuelles :

<u>Théorème</u> : Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions logarithmes, les fonctions exponentielles, les fonctions trigonométriques et Arctangente sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition. Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition sauf celles qui correspondent à $0 < \alpha < 1$ qui le sont sur $D_f - \{0\}$. Les fonctions Arcsinus et Arccosinus sont de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

3) Convexité

Une fonction convexe est une fonction dont le « creux » de la courbe est dirigé vers le haut, ce qui signifie que la courbe est en dessous de toutes ses cordes : $\forall m \in [a,b] \quad y_M \le y_P$.



Or $m \in [a,b] \Leftrightarrow 0 \le b - m \le b - a$.

On pose $t = \dfrac{b-m}{b-a}$. Donc $m \in [a,b] \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$

Donc $m \in [a,b] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1] \quad m = ta + (1-t)b$

Donc P est barycentre de $A(t)$ et $B(1-t)$.

Donc $y_P = ty_A + (1-t)y_B = tf(a) + (1-t)f(b)$.

<u>Définition</u> : Une fonction f est :
- convexe sur I si : $\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f[ta + (1-t)b] \le tf(a) + (1-t)f(b)$.
- concave sur I si : $\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f[ta + (1-t)b] \ge tf(a) + (1-t)f(b)$.

<u>Interprétation géométrique</u> : Une fonction f est :
- convexe si et seulement si sa courbe est en dessous de toutes ses cordes.
- concave si et seulement si la courbe est au dessus de toutes ses cordes.

Une fonction f est concave si et seulement si $(-f)$ est convexe.

Les démonstrations seront donc faites pour les fonctions convexes.

<u>Remarque</u> : Toute fonction affine est à la fois convexe et concave. C'est évident car les points M et P sont confondus.

<u>Inégalité de convexité</u> : Si f est convexe sur I, alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, on a l'inégalité : $f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$.

C'est une généralisation de la définition qui se démontre par récurrence.

<u>Théorème</u> : Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $T_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I - \{a\}$.

Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $T_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est décroissante sur $I - \{a\}$.

<u>Démonstration</u> : La démonstration se fait en deux temps.

- On suppose f convexe sur I. Soit $x \le y < a$. Donc $\exists t \in [0,1[\quad y = tx + (1-t)a$.
  Donc $f(y) \le tf(x) + (1-t)f(a)$. Donc $f(y) - f(a) \le t[f(x) - f(a)]$.

Or $t = \dfrac{y-a}{x-a}$. On divise par $y-a<0$. Donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

Donc si $x \leq y < a$ alors $T_a(x) \leq T_a(y)$. Donc T_a est croissante sur $I \cap]-\infty, a[$.

Soit $a < x \leq y$. Donc $\exists t \in [0,1[\quad x = ta + (1-t)y$.

Donc $f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(y)$. Donc $f(x) - f(a) \leq (1-t)[f(y)-f(a)]$.

Or $1-t = 1 - \dfrac{x-y}{a-y} = \dfrac{a-x}{a-y} = \dfrac{x-a}{y-a}$. On divise par $x-a>0$.

Donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

Donc si $a < x \leq y$ alors $T_a(x) \leq T_a(y)$. Donc T_a est croissante sur $I \cap]a, +\infty[$.

- On suppose que toutes les fonctions T_a sont croissantes sur $I - \{a\}$.

  Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et $t \in [0,1[$. Donc $a < ta + (1-t)b \leq b$.

  La fonction T_a est croissante. Donc $T_a[ta + (1-t)b] \leq T_a(b)$.

  Donc $\dfrac{f[ta+(1-t)b]-f(a)}{[ta+(1-t)b]-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, donc $\dfrac{f[ta+(1-t)b]-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

  On multiplie par $(1-t)(b-a)>0$. Donc $f[ta+(1-t)b]-f(a) \leq (1-t)[f(b)-f(a)]$

  Donc : $f[ta+(1-t)b] \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ si $a<b$ et $t \in [0,1[$.

  Pour $t=1$, la propriété est évidente. Même chose si $a=b$.

  Si $a>b$, le raisonnement précédent est vrai en intervertissant *a* et *b*.

  On obtient : $\forall u \in [0,1] \quad f[ub + (1-u)a] \leq uf(b) + (1-u)f(a)$.

  On l'applique à $u = 1-t$ ce qui est possible car $t \in [0,1] \Leftrightarrow 1-t \in [0,1]$.

Théorème : Une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I* est convexe sur *I* si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur *I*.

Une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I* est concave sur *I* si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur *I*

Démonstration :

- On suppose que *f* est dérivable et convexe sur *I*. Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a<b$.

  Pour tout $x \in]a,b[$, d'après le théorème précédent, T_x est croissante.

  Donc : $\forall x \in]a,b[\quad T_x(a) \leq T_x(b)$, donc $\forall x \in]a,b[\quad \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$.

  Donc : $\forall x \in]a,b[\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$

  Donc : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$, donc : $f'(a) \leq \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

  Et $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$, donc : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$.

  Or $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$. Donc : $f'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$.

  Donc f' est croissante sur *I*.

- On suppose que *f* est dérivable et que f' est croissante sur *I*.

  Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a<b$ et $t \in]0,1[$. On pose $x = ta + (1-t)b$, donc $a < x < b$.

  D'après la formule des accroissements finis, il existe $c \in]a,x[$ et $d \in]x,b[$ tels que :

  $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ et $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(d)$.

  Or $a<c<x<d<b$ et f' est croissante. Donc $f'(c) \leq f'(d)$.

Donc : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Donc : $\dfrac{f(x)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{t(b-a)}$.

Donc : $t[f(x)-f(a)] \leq (1-t)[f(b)-f(x)]$. Donc : $f(x) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$.

Donc : $f[ta+(1-t)b] \leq tf(a)+(1-t)f(b)$ si $a<b$ et $t \in]0,1[$.

Pour $t=0$ ou $t=1$, la propriété est évidente. Même chose si $a=b$.

Si $a>b$, le raisonnement précédent est vrai en intervertissant *a* et *b*.

<u>Interprétation géométrique</u> : Une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I* est :
- convexe si et seulement si sa courbe est au dessus de toutes ses tangentes.
- concave si et seulement si la courbe est en dessous de toutes ses tangentes.

<u>Démonstration</u> : Soit *f* une fonction dérivable sur *I*.

- On suppose que *f* est convexe sur *I*. Soit $a \in I$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse *a* est : $y=(x-a)f'(a)+f(a)$.

  On pose : $\forall x \in I \quad \varphi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$. On cherche le signe de φ.

  Si $a<x$, il existe $c \in]a,x[$ tel que $f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)$.

  Donc : $\varphi(x)=(x-a)[f'(c)-f'(a)]$. Or $x-a>0$ et $a<c$ donc $f'(a) \leq f'(c)$ car *f* est convexe, donc f' est croissante. Donc si $a<x$: $\varphi(x) \geq 0$.

  Si $x<a$, on a $\varphi(x)=(x-a)[f'(c)-f'(a)]$ avec $x<c<a$. Donc $x-a<0$ et $f'(c) \leq f'(a)$. Donc si $a<x$: $\varphi(x) \geq 0$. C'est évident pour $x=a$.

  Donc : $\forall (a,x) \in I^2 \quad \varphi(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq (x-a)f'(a)+f(a)$.

- On suppose que la courbe est au dessus de ses tangentes.

  Donc : $\forall (a,b) \in I^2 \quad f(a) \geq (a-b)f'(b)+f(b)$ et $f(b) \geq (b-a)f'(a)+f(a)$.

  Si $a<b$, alors : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b)$ et $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'(a)$.

  Donc si $a<b$, alors : $f'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$.

  Donc f' est croissante sur *I*, et donc *f* est convexe.

<u>Théorème</u> : Une fonction *f* dérivable deux fois sur un intervalle *I* est convexe sur *I* si et seulement si sa dérivée f'' est positive sur *I*.

Une fonction *f* dérivable deux fois sur un intervalle *I* est concave sur *I* si et seulement si sa dérivée f'' est négative sur *I*.

Lorsque la dérivée seconde s'annule sans changer de signe, la fonction ne change pas de concavité. Par contre, si la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, la courbe traverse sa tangente. On dit que la courbe représentative de *f* admet un point d'inflexion.

<u>*Exemple*</u> : $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. La fonction est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$ et $f''(x)=\dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty,-\sqrt{3}[$ et $]0,\sqrt{3}[$.

f est concave sur $]-\sqrt{3},0[$ et $]\sqrt{3},+\infty[$.

Et la courbe possède trois points d'inflexion $A(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4})$, *O* et $B(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4})$.