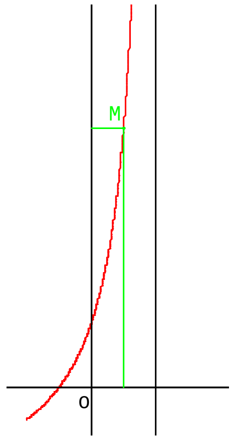
Sur $]-\infty,0[$, $g(x)<-A \Leftrightarrow -\dfrac{1}{A}\le x<0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$.



Interprétation géométrique : Quand x tend vers a (à gauche ou à droite), le point variable $M(x, f(x))$ se déplace sur la courbe : son abscisse se rapproche de a tandis que son ordonnée tend vers l'infini. Il se rapproche donc de la droite d'équation $x=a$: on dit alors que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe.

Théorème : Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ (à gauche ou à droite), alors la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=a$.

3) Limite finie à l'infini

On dira qu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]a,+\infty[$.

Définition 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ si $\forall\varepsilon>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x>B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=3$. Ici : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ donc $D_f=\mathbb{R}$. Et $\ell=3$.

. $|f(x)-\ell|=\left|\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}-3\right|=\left|\dfrac{-4}{e^x+1}\right|=\dfrac{4}{e^x+1}$.

Donc $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow e^x+1>\dfrac{4}{\varepsilon}$. Si $\varepsilon\ge 4$, c'est toujours vrai car $e^x>0$.

Et si $\varepsilon<4$, alors : $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow x>\ln\left(\dfrac{4}{\varepsilon}-1\right)$.

Donc : $\forall\varepsilon>0 \quad \exists B=\ln\left(\dfrac{4}{\varepsilon}-1\right) \quad \forall x\in D_f \quad x>B\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=3$.

On dira qu'une fonction f est définie au voisinage de $-\infty$ si son ensemble de définition contient au moins un intervalle de la forme $]-\infty,a[$.

Définition 4 : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ si $\forall\varepsilon>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=-1$. Ici : $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ donc $D_f=\mathbb{R}$. Et $\ell=-1$.

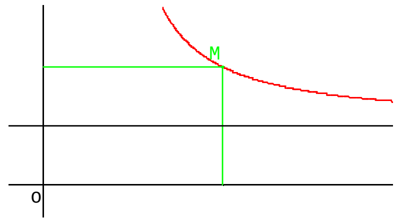
. $|f(x)-\ell|=\left|\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}+1\right|=\left|\dfrac{4e^x}{e^x+1}\right|=\dfrac{4}{e^{-x}+1}$.

Donc $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow e^{-x}+1>\dfrac{4}{\varepsilon}$. Si $\varepsilon\ge 4$, c'est toujours vrai car $e^{-x}>0$.

Et si $\varepsilon<4$, alors : $|f(x)-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow x<-\ln\left(\dfrac{4}{\varepsilon}-1\right)$.

Donc : $\forall\varepsilon>0 \quad \exists B=\ln\left(\dfrac{4}{\varepsilon}-1\right) \quad \forall x\in D_f \quad x<-B\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = -1$.



<u>Interprétation géométrique</u> : Quand x tend vers ∞, le point variable $M(x, f(x))$ se déplace sur la courbe : son abscisse tend vers l'infini tandis que son ordonnée se rapproche de ℓ. Il se rapproche donc de la droite d'équation $y=\ell$: on dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe.

<u>Théorème</u> : Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=\ell$.

4) <u>Limite infinie à l'infini</u>

<u>Définition 5</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x>B \Rightarrow f(x)>A$.

<u>Exemple</u> : Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Ici $f(x)=\ln x$ et $D_f =]0,+\infty[$.

On pourrait dire que $f(x)>A \Leftrightarrow x>e^A$. Mais pour définir l'exponentielle, on utilise le théorème de bijection, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc on raisonne autrement en n'utilisant que le logarithme.

On sait que ln est croissante, que $\ln 2^n = n\ln 2$ et que $\ln 2>0$ car 2>1.

Soit $A>0$. Pour tout $n>\dfrac{A}{\ln 2}$, on a $\ln 2^n > A$. Donc si $x>2^n$, alors $\ln x > \ln 2^n > A$.

Donc : $\forall A>0 \quad \exists B=2^n \quad \forall x\in D_f \quad x>B \Rightarrow f(x)>A$ avec $n=\mathrm{Ent}\left(\dfrac{A}{\ln 2}\right)+1$.

<u>Définition 6</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x>B \Rightarrow f(x)<-A$.

<u>Définition 7</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x<-B \Rightarrow f(x)>A$.

<u>Définition 8</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $\forall A>0 \quad \exists B>0 \quad \forall x\in D_f \quad x<-B \Rightarrow f(x)<-A$.

<u>Interprétation géométrique</u> : Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, le problème est de comparer les ordres de grandeur de $f(x)$ et de x. On étudie donc le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, cela signifie que $x \underset{\infty}{=} o[f(x)]$ comme x^2. Par analogie, on dira que la courbe de f admet une branche parabolique de direction Oy.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, cela signifie que $f(x) \underset{\infty}{=} o(x)$ comme $\sqrt{x}$. Par analogie, on dira que la courbe de f admet une branche parabolique de direction Ox.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a\neq 0$), cela signifie que $f(x) \underset{\infty}{\sim} ax$. On cherche alors à déterminer l'ordre de grandeur de $f(x)-ax$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-ax] = \infty$, on dira que la courbe de f possède une direction asymptotique $y=ax$ (mais pas d'asymptote).

Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$, on dira que la courbe de *f* possède une asymptote d'équation $y=ax+b$. En effet, si *M* est le point de la courbe d'abscisse *x* et *P* celui de la droite, alors $\overline{PM}=f(x)-ax-b$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{PM}=0$. La courbe se rapproche de la droite.

Définition : Les courbes des fonctions *f* et *g* sont des courbes asymptotes à l'infini si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$. En particulier, une droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe de *f* à l'infini si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$.

C'est équivalent à dire que : $f(x)=ax+b+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

En résumé : Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ et :

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, la courbe de *f* admet une branche parabolique de direction *Oy*.

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, la courbe de *f* admet une branche parabolique de direction *Ox*.

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ ($a\neq 0$) et :

- Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$, la courbe de *f* possède une direction asymptotique $y=ax$.
- Si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$, la courbe de *f* a une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$.

II – Propriétés

1) Unicité

Théorème : Si une fonction *f* admet une limite réelle en $a\in\overline{\mathbb{R}}$, cette limite est unique. On la note : $\ell=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ou $\ell=\lim\limits_{a}f$.

Démonstration : On suppose qu'il existe deux limites $\ell_1<\ell_2$ et on pose $\varepsilon=\dfrac{\ell_2-\ell_1}{3}$.

Par définition : $\exists\alpha_1>0\quad\forall x\in D_f\quad |x-a|<\alpha_1\Rightarrow|f(x)-\ell_1|<\varepsilon$.

De même : $\exists\alpha_2>0\quad\forall x\in D_f\quad |x-a|<\alpha_2\Rightarrow|f(x)-\ell_2|<\varepsilon$.

Donc en prenant $\alpha=\mathrm{Min}(\alpha_1,\alpha_2)$: $\forall x\in D_f\quad |x-a|<\alpha\Rightarrow\begin{cases}|f(x)-\ell_1|<\varepsilon\\|f(x)-\ell_2|<\varepsilon\end{cases}$.

Donc $f(x)$ appartient à l'intersection de $]\ell_1-\varepsilon,\ell_1+\varepsilon[$ et de $]\ell_2-\varepsilon,\ell_2+\varepsilon[$. Or c'est impossible car $\ell_1+\varepsilon<\ell_2-\varepsilon$. Donc la limite si elle existe est unique.

2) Opérations algébriques

Tous les tableaux des opérations algébriques concernent tous les types de limites.
Les théorèmes suivants sont admis ici, mais se démontrent à l'aide des définitions.

u	v	$u+v$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indétermination

u	v	uv
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
∞	$\ell'\neq 0$	∞
∞	0	Indétermination
∞	∞	∞

On complète par la règle des signes.

u	$\dfrac{1}{u}$
$\ell \neq 0$	$\dfrac{1}{\ell}$
0	∞
∞	0

u	v	$\dfrac{u}{v}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	∞
0	0	Indétermination
∞	ℓ'	∞
ℓ	∞	0
∞	∞	Indétermination

Lorsque le dénominateur tend vers 0, il faut en étudier le signe, car les tableaux ne donnent que la valeur absolue.

3) **Composition de limites**

Théorème : a, b et ℓ sont des réels (éventuellement gauche ou droite) ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} (v \circ u)(x) = \ell$.

Il est souvent commode de le rédiger par changement de variable : en posant $X = u(x)$, le théorème revient à écrire $\lim\limits_{x\to a} (v \circ u)(x) = \lim\limits_{X\to b} v(X)$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x+1} = 0$ (positif car $x > 1$). Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$.

4) **Propriétés liées à la relation d'ordre**

Le passage à la limite est compatible avec la relation d'ordre.

Théorème : Si, au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $u(x) \leq v(x)$, alors :
- si u et v admettent en a des limites réelles, alors : $\lim\limits_{x\to a} u(x) \leq \lim\limits_{x\to a} v(x)$.
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$.

Remarque : Dans le théorème, on a des inégalités larges. Même si au voisinage de a, on a $u(x) < v(x)$, au passage à la limite, on ne pourra conclure qu'à l'inégalité large.

En effet, une fonction strictement positive, comme $\dfrac{1}{x}$ par exemple, peut tendre vers 0.

Exemple : On démontre par étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x \leq e^x$.

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$.

Théorème d'encadrement : Si, au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si u et v ont en a la même limite réelle ℓ, alors f a aussi une limite réelle et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Remarque : Ce théorème démontre l'existence de la limite de f.

Exemple : On démontre par étude de fonction que : $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \leq \ln x \leq x-1$.

Donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \leq \ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1$. Donc $\forall x \in [1,+\infty[\quad 0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$. Donc d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Et par composition avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$, on en déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.

Exemple : C'est aussi comme cela qu'on démontre que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

5) Limite d'une fonction monotone

Théorème : Si f est une fonction croissante sur $]a,b[$, alors :
- si elle est majorée, elle admet une limite réelle en b^-. Sinon $\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty$.
- Si elle est minorée, elle admet une limite réelle en a^+. Sinon $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.

Comme une fonction f est décroissante si $-f$ est croissante, on a :

Théorème : Si f est une fonction décroissante sur $]a,b[$, alors :
- si elle est minorée, elle admet une limite réelle en b^-. Sinon $\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty$.
- Si elle est majorée, elle admet une limite réelle en a^+. Sinon $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$.

Ces théorèmes se démontrent à l'aide de la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

III – Comparaison des fonctions en un point

Il s'agit de comparaison de fonctions au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. La fonction n'est pas forcément définie en a si a est réel.

1) Fonctions équivalentes

Définition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V tels que : $\forall x\in V \quad f(x)=[1+\varepsilon(x)]g(x)$ et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

On note $f \underset{a}{\sim} g$.

On peut remarquer qu'au voisinage de a, f et g ont le même signe car la fonction $x\mapsto 1+\varepsilon(x)$ tend vers 1, donc est positive au voisinage de a.

Théorème : Si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

En effet $\frac{f(x)}{g(x)}=1+\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Cela permet de déterminer des limites en comparant avec des limites connues.

En effet $\lim_{x\to a}[1+\varepsilon(x)]=1$, et donc si $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$ (réel ou infini), alors $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$.

Réciproquement, si $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$ (réel non nul), alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Théorème : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g a une limite (finie ou non) en a, alors f admet la même limite. Réciproquement, si f et g ont la même limite réelle non nulle, alors $f \underset{a}{\sim} g$.

La réciproque est fausse si la limite est nulle ou infinie (par exemple x et x^2 en 0 ou $+\infty$).

Transitivité : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Compatibilité avec le produit : Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1\times f_2 \underset{a}{\sim} g_1\times g_2$.

Compatibilité avec le quotient : Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et si $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Compatibilité avec la puissance : Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $|f|^\alpha \underset{a}{\sim} |g|^\alpha$ (α réel quelconque).

En particulier, si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $|f| \underset{a}{\sim} |g|$ et $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$ si les fonctions sont positives.

Démonstration :

- $f \underset{a}{\sim} g$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f(x) = [1+\varepsilon_1(x)]g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
  $g \underset{a}{\sim} h$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad g(x) = [1+\varepsilon_2(x)]h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.
  Donc $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f(x) = [1+\varepsilon_1(x)][1+\varepsilon_2(x)]h(x) = [1+\varepsilon(x)]h(x)$
  avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{\sim} h$.
- $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f_1(x) = [1+\varepsilon_1(x)]g_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$
  $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad f_2(x) = [1+\varepsilon_2(x)]g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$
  $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f_1(x) f_2(x) = [1+\varepsilon_1(x)][1+\varepsilon_2(x)]g_1(x)g_2(x) = [1+\varepsilon(x)]g_1(x)g_2(x)$
  avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f_1 \times f_2 \underset{a}{\sim} g_1 \times g_2$.
  De même : $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} \times \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)} = [1+\varepsilon(x)] \times \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$
  avec $\varepsilon(x) = \dfrac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)} - 1$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.
- $f \underset{a}{\sim} g$ donc il existe V et ε : $\forall x \in V \quad f(x) = [1+\varepsilon(x)]g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
  Donc : $\forall x \in V \quad |f(x)|^\alpha = [1+\varepsilon(x)]^\alpha |g(x)|^\alpha$. Or $[1+\varepsilon(x)]^\alpha = e^{\alpha \ln[1+\varepsilon(x)]}$.
  $\lim\limits_{x\to a} [1+\varepsilon(x)]^\alpha = 1$ donc $|f|^\alpha \underset{a}{\sim} |g|^\alpha$. Si $\alpha = 1$, $|f| \underset{a}{\sim} |g|$ et si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$.

Mais on ne peut pas :

ajouter des équivalents ou remplacer un terme d'une somme par un équivalent.

Exemple : $f(x) = x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = -x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ mais $f(x) + g(x) = 2$ n'est pas équivalent à 0.

composer des équivalents par une fonction quelconque.

Exemple : $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ mais e^{x^2+x} n'est pas équivalent à e^{x^2} : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = +\infty$.

Equivalents à connaître :

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2} x^2$

A l'infini, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, et une fraction rationnelle au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur : $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$ et $\dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$

En 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré, et une fraction rationnelle au quotient des termes de plus bas degré de son numérateur et de son dénominateur : $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \underset{0}{\sim} a_0$ et $\dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0} \underset{0}{\sim} \dfrac{a_0}{b_0}$ si $\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ b_0 \neq 0 \end{cases}$.

Pour les deux premiers : $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

$(1+x)^\alpha-1=e^{\alpha\ln(1+x)}-1$ et $\lim_{x\to 0}\alpha\ln(1+x)=0$. Or $e^x-1\underset{0}{\sim}x$.

Donc $(1+x)^\alpha-1\underset{0}{\sim}\alpha\ln(1+x)$. Et $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$. Donc $(1+x)^\alpha-1\underset{0}{\sim}\alpha x$.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ donc $1-\cos x\underset{0}{\sim}2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ donc $1-\cos x\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2}x^2$.

Les propriétés des polynômes se démontrent en montrant que la limite du quotient est 1. Les propriétés des fractions rationnelles se démontrent par compatibilité avec le quotient.

2) Fonctions négligeables

Définition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. La fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V tels que : $\forall x\in V \quad f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

On note $f\underset{a}{=}o(g)$.

Théorème : Si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f\underset{a}{=}o(g)$ ssi $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

En effet $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$, et donc si $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ (réel), alors $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

Réciproquement, si $\lim_{x\to a}f(x)=0$ et $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ (réel non nul), alors $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Théorème : Si $f\underset{a}{=}o(g)$ et si g a une limite (réelle) en a, alors $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

Réciproquement, si $\lim_{x\to a}f(x)=0$ et $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ (réelle non nulle), alors $f\underset{a}{=}o(g)$.

Mais si g a une limite infinie, on peut avoir $f\underset{a}{=}o(g)$ avec $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$.

Exemple : $x\underset{+\infty}{=}o(x^2)$ mais $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Et on peut avoir $\lim_{x\to a}f(x)=0$ et $\lim_{x\to a}g(x)=0$ sans que $f\underset{a}{=}o(g)$.

Exemple : $\lim_{x\to 0}x=0$ et $\lim_{x\to 0}2x=0$ mais $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}\neq 0$.

Transitivité : Si $f\underset{a}{=}o(g)$ et $g\underset{a}{=}o(h)$, alors $f\underset{a}{=}o(h)$.

Compatibilité avec un équivalent : Si $f\underset{a}{=}o(g)$ et $g\underset{a}{\sim}h$, alors $f\underset{a}{=}o(h)$.

Si $g\underset{a}{=}o(f)$, alors $f+g\underset{a}{\sim}f$.

Compatibilité avec l'addition : Si $f_1\underset{a}{=}o(g)$ et si $f_2\underset{a}{=}o(g)$, alors $f_1+f_2\underset{a}{=}o(g)$.

Compatibilité avec le produit : Si $f_1\underset{a}{=}o(g_1)$ et si $f_2\underset{a}{=}o(g_2)$, alors $f_1f_2\underset{a}{=}o(g_1g_2)$.

Compatibilité avec la puissance : Si $f\underset{a}{=}o(g)$, alors $|f|^\alpha\underset{a}{=}o(|g|^\alpha)$ si $\alpha>0$.

En particulier, si $f \underset{a}{=} o(g)$, $|f| \underset{a}{=} o(|g|)$ et $\sqrt{f} \underset{a}{=} o(\sqrt{g})$ si les fonctions sont positives.

Démonstration :

- $f \underset{a}{=} o(g)$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
  $g \underset{a}{=} o(h)$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad g(x) = \varepsilon_2(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.
  Donc $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)h(x) = \varepsilon(x)h(x)$ avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{=} o(h)$.
- $f \underset{a}{=} o(g)$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
  $g \underset{a}{\sim} h$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad g(x) = [1+\varepsilon_2(x)]h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.
  Donc $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f(x) = \varepsilon_1(x)[1+\varepsilon_2(x)]h(x) = \varepsilon(x)h(x)$
  avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)[1+\varepsilon_2(x)]$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{=} o(h)$.
- $g \underset{a}{=} o(f)$ donc il existe V et ε : $\forall x \in V \quad g(x) = \varepsilon(x)f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
  Donc $\forall x \in V \quad f(x) + g(x) = [1+\varepsilon(x)]f(x)$. Donc $f + g \underset{a}{\sim} f$.
- $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
  $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad f_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.
  Donc : $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f_1(x) + f_2(x) = [\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)]g(x) = \varepsilon(x)g(x)$
  avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
- $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ donc il existe V_1 et ε_1 : $\forall x \in V_1 \quad f_1(x) = \varepsilon_1(x)g_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$.
  $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ donc il existe V_2 et ε_2 : $\forall x \in V_2 \quad f_2(x) = \varepsilon_2(x)g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0$.
  Donc : $\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad f_1(x)f_2(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)g_1(x)g_2(x) = \varepsilon(x)g_1(x)g_2(x)$.
  avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
- $f \underset{a}{=} o(g)$ donc il existe V et ε : $\forall x \in V \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
  Donc : $\forall x \in V \quad |f(x)|^\alpha = |\varepsilon(x)|^\alpha |g(x)|^\alpha$. Or si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} |\varepsilon(x)|^\alpha = 0$.
  Donc $|f|^\alpha \underset{a}{=} o(|g|^\alpha)$. Donc $|f| \underset{a}{=} o(|g|)$ pour $\alpha = 1$ et $\sqrt{f} \underset{a}{=} o(\sqrt{g})$ pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

<u>Mais on ne peut pas</u> :

<u>diviser</u> des *o*.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x\sqrt{x} \underset{0}{=} o(x)$ et $g(x) = x^2 \underset{0}{=} o(x)$ mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est négligeable ni devant x ni devant $\dfrac{x}{x} = 1$.

<u>composer</u> des *o* par une fonction quelconque.

<u>Exemple</u> : $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ mais $\ln x$ n'est pas négligeable devant $\ln(x^2) = 2\ln x$.

<u>Négligeabilités usuelles</u> : $x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta)$ si $\alpha > \beta > 0$ $\qquad$ $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ si $0 < \alpha < \beta$

$(\ln x)^\beta \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ $\qquad$ $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$e^x \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$ si $\alpha > 0$ $\qquad$ $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ si $\alpha > 0$

En effet : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-\beta} = 0$ si $\alpha > \beta$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = 0$ si $\alpha < \beta$.

Les autres sont les conséquences des croissances comparées :

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha/\beta} \ln x = 0$ donc $\ln x \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\alpha/\beta}}\right)$ donc $(\ln x)^\beta \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha/\beta}} = 0$ donc $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x^{\alpha/\beta})$ donc $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0$ donc $e^x \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = 0$ donc $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

IV – Continuité

1) Continuité en un point

<u>Définition</u> : Une fonction *f* définie sur un intervalle *I* contenant *a* (et non réduit à *a*) est continue en *a* si elle admet en *a* une limite réelle égale à $f(a)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

La fonction est continue à gauche en *a* si elle admet une limite à gauche égale à $f(a)$.
La fonction est continue à droite en *a* si elle admet une limite à droite égale à $f(a)$.

Le problème est l'existence de la limite car on a vu que si elle existe, c'est $f(a)$.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^2$ en 2. On a : $|f(x) - f(2)| = |x-2| \times |x+2|$.

Donc $\forall x \in [1,3] \quad |f(x) - f(2)| \le 5|x-2|$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha = \mathrm{Inf}(1, \frac{\varepsilon}{5}) \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; |x-2| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$.

<u>Contre-exemple</u> : $f(x) = \mathrm{Ent}(x) = \lfloor x \rfloor$ en 1 par exemple.

$\forall x \in]0,1[\quad f(x) - f(1) = -1$ et $\forall x \in [1,2[\quad f(x) - f(1) = 0$.

Donc pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\cap]0,1[$: $|f(x) - f(1)| = 1$.

Donc si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple, on ne pourra pas trouver α tel que pour tout *x* vérifiant $|x-1| < \alpha$ on ait $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

Donc la fonction partie entière n'est pas continue en 1. Par contre, elle est continue à droite en 1 puisqu'elle est constante à droite. Elle n'est pas continue à gauche en 1.

<u>Théorème</u> : Une fonction *f* définie sur un intervalle ouvert *I* contenant *a* est continue en *a* si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en *a*.

Ce théorème correspond au théorème analogue sur les limites.
Lorsque *a* est une borne de l'intervalle *I*, la continuité en *a* coïncide avec la continuité à gauche ou à droite.

Prolongement par continuité

Prolongement par : Soit I un intervalle et $a \in I$. Si f est une fonction définie sur $I-\{a\}$ et si f admet en a une limite réelle ℓ, alors la fonction f est prolongeable par continuité en a : la fonction g définie par : $g(a)=\ell$ et $\forall x \in I-\{a\} \quad g(x)=f(x)$ est continue en a et s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

En effet par construction $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell = g(a)$.

On peut remarquer que ce prolongement par continuité est unique.

Interprétation géométrique : On a vu que la courbe de f admet un point limite $A(a,\ell)$. C'est le point que l'on ajoute pour obtenir la courbe de g.

Opérations

Théorème : Si k est un réel, si u et v sont deux fonctions continues en a, alors les fonctions $u+v$, ku et uv sont continues en a, ainsi que $\frac{u}{v}$ si $v(a)\neq 0$.

C'est une conséquence des opérations sur les limites.

Théorème : Si u est une fonction continue en a et v une fonction continue en $u(a)$, alors la fonction $v\circ u$ est continue en a.

C'est le théorème de composition des limites.

2) Continuité sur un intervalle

Définition : Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de I.

Lorsque l'intervalle I est ouvert, c'est la continuité à gauche et à droite en tout point.
Lorsque $I=[a,b]$, c'est la continuité à gauche et à droite en tout point de $]a,b[$, la continuité à droite en a et la continuité à gauche en a.

Théorème : Si k est un réel, si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors les fonctions $u+v$, ku et uv sont continues sur I, ainsi que $\frac{u}{v}$ en tout $a\in I$ tel que $v(a)\neq 0$.
Si u est une fonction continue sur I et v une fonction continue sur $u(I)$, alors la fonction $v\circ u$ est continue sur I.

C'est une conséquence du théorème que pour la continuité en un point.

Théorème :
Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
Les fonctions logarithmes sont continues sur $]0,+\infty[$.
Les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions puissances $x\mapsto x^{\alpha}$ sont continues sur leur ensemble de définition.
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions tangente et cotangente sont continues sur leur ensemble de définition.
La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Elle est continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$, mais discontinue à gauche.

3) Propriétés

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle image de l'intervalle I par la fonction f l'ensemble noté $f(I)$ de toutes les images des éléments de I : $f(I)=\{f(x)\ /\ x\in I\}$.

Cet ensemble permettra de résoudre des équations et des inéquations dans I.

En effet, résoudre l'équation $f(x)=3$ sur l'intervalle I revient à déterminer les réels x de l'intervalle I dont l'image est 3, donc les antécédents de 3.
Si $3 \notin f(I)$, l'équation n'a pas de solution.
Et si $3 \in f(I)$, l'équation admet au moins une solution dans I.

L'équation $f(x)=k$ admet des solutions dans I si et seulement si $k \in f(I)$.

De plus, si par exemple $f(I)=]1,3[$, alors $\forall x \in I \quad f(x) \in]1,3[$, donc $1 < f(x) < 3$.
La détermination de l'ensemble $f(I)$ donne donc aussi un encadrement de f sur I.

<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u> : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

On admet ce théorème. Il signifie que si la fonction prend deux valeurs $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ sur I, alors elle prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre y_1 et y_2. Donc toute équation de la forme $f(x)=k$ où k est compris entre y_1 et y_2 admet au moins une solution. En particulier, si f est continue sur un intervalle et si f prend une valeur positive et une valeur négative, elle s'annule au moins une fois.
Mais l'intervalle image n'est pas forcément de même nature que l'intervalle de départ.

<u>Exemple 1</u> : $f(x)=x^2$ et $I=]-2,2[$. L'image est $f(I)=[0,4[$.

<u>Exemple 2</u> : Si $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, on a $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

Si $I=]-\infty,+\infty[$, alors $f(I)=\left[-\dfrac{1}{2},+\dfrac{1}{2}\right]$.

Un seul cas donne <u>toujours</u> le même genre d'intervalle.

<u>Théorème</u> : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Donc si f est continue sur $I=[a,b]$, alors $f(I)=[m,M]$.
Les réels m et M représentent le minimum et le maximum de f sur $I=[a,b]$. On note : $m=\underset{t\in[a,b]}{\text{Min}} f(t)$ et $M=\underset{t\in[a,b]}{\text{Max}} f(t)$.
Ils appartiennent à $f(I)$. Il existe donc des réels c et d de I tels que $m=f(c)$ et $M=f(d)$. Donc f atteint ses bornes.
Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M : $\forall k \in [m,M] \quad \exists x \in [a,b] \quad k=f(x)$.

<u>Conséquence</u> : Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée, atteint ses bornes $m=\underset{t\in[a,b]}{\text{Min}} f(t)$ et $M=\underset{t\in[a,b]}{\text{Max}} f(t)$, et prend au moins une fois toute valeur comprise entre ces bornes.

Par contre, elle peut prendre plusieurs fois certaines valeurs. Pour avoir l'unicité, il faut supposer en plus que la fonction ne prend pas plusieurs fois la même valeur, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $a<b$ tels que $f(a)=f(b)$. C'est en particulier le cas si la fonction f est strictement monotone.

<u>Théorème de la bijection</u> : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$, strictement monotone de même sens de variation que f et sa courbe représentative est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le problème revient donc à la détermination de l'image $f(I)$.

<u>Théorème</u> : Si f est une fonction continue et monotone sur un intervalle fermé $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ si f est croissante et $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ si f est décroissante.

Ce théorème de bijection permet de construire de nouvelles fonctions :

<u>Exemple 1</u> : La fonction $f: x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc est bijective de $[0,+\infty[$ dans $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$. La fonction réciproque est la fonction racine n-ième notée : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Le cas particulier le plus connu est celui de la racine carrée $(n = 2)$.

<u>Exemple 2</u> : La fonction $f: x \mapsto \ln x$ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc est bijective de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[$. La fonction réciproque est la fonction exponentielle.

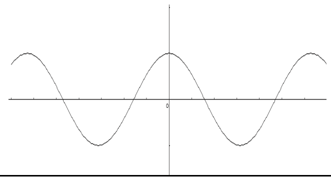
V – Réciproques des fonctions trigonométriques

1) Fonction cosinus

<u>Théorème</u> : La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π.

Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi]$.
La parité permet par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées d'obtenir la courbe sur $[-\pi,\pi]$.
La périodicité permet par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$ d'obtenir toute la courbe.

Le point $I\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est centre de symétrie de la courbe car :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$.



<u>Théorème</u> : La fonction cosinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos)'(x) = -\sin x$.

Donc : $\forall x \in]0,\pi[\quad (\cos)'(x) > 0$ et $(\cos)'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$.

Donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. De plus elle est continue, donc elle définit une bijection de $[0,\pi]$ dans $[\cos\pi, \cos 0] = [-1,1]$.

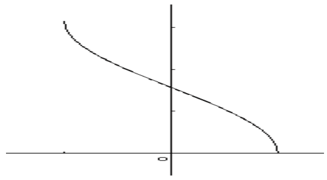
<u>Définition</u> : La restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et on appelle Arccosinus sa réciproque : $\forall x \in [-1,1] \quad y = \text{Arccos}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$

On obtient le tableau des valeurs usuelles :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arccos}\, x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Théorème : La fonction Arccosinus est définie, continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$. Sur cet intervalle, sa courbe est symétrique de celle du cosinus par rapport à la première bissectrice.

x	-1		0		1
Arccos'	$\|\|$	$-$	-1	$-$	$\|\|$
Arccos	π	$\searrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0



Propriété : $\forall x \in [-1,1] \quad \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$

Démonstration : On pose $\alpha = \text{Arccos}\, x$ et $\beta = \text{Arccos}(-x)$.

Donc $\alpha \in [0,\pi]$ et $\beta \in [0,\pi]$. Et : $\cos\beta = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$.

Or si $0 \le \alpha \le \pi$, alors $0 \le \pi - \alpha \le \pi$. Donc par injectivité : $\beta = \pi - \alpha$.

Théorème : La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\quad (\text{Arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration : Soit $a \in [-1,1]$ et $x \in [-1,1]$ avec $x \neq a$. Le taux d'accroissement est :

$T(x) = \dfrac{\text{Arccos}\, x - \text{Arccos}\, a}{x-a} = \dfrac{y-b}{\cos y - \cos b}$ avec $y = \text{Arccos}\, x$ et $b = \text{Arccos}\, a$.

Or la fonction Arccosinus est continue. Donc $\lim\limits_{x \to a} \text{Arccos}\, x = \text{Arccos}\, a$.

Donc : $\lim\limits_{x \to a} T(x) = \lim\limits_{y \to b} \dfrac{y-b}{\cos y - \cos b}$ si elle existe.

La fonction cosinus est dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall y \in [0,\pi] \quad (\cos)'(y) = -\sin y$.

Donc : $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{\cos y - \cos b}{y-b} = -\sin b$. Et $\sin b = 0$ ssi $b \in \{0,\pi\}$, donc ssi $a \in \{-1,1\}$.

Donc si $a = \pm 1$, $\lim\limits_{x \to a} T(x) = \infty$. Donc la fonction Arccosinus n'est pas dérivable en *a*.

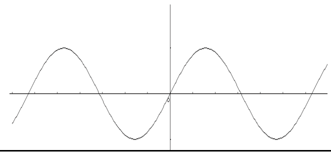
Mais si $a \in]-1,1[$: $\lim\limits_{x \to a} T(x) = -\dfrac{1}{\sin b} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ car : $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - a^2$ et $b \in]0,\pi[$ donc $\sin b > 0$. Donc la fonction Arccosinus est dérivable en *a*.

2) **Fonction sinus**

Théorème : La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 2π.

Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi]$. La parité permet par symétrie par rapport à l'origine d'obtenir la courbe sur $[-\pi,\pi]$. La périodicité permet par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$) d'obtenir toute la courbe.

La droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe car : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$.



Théorème : La fonction sinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos x$.

$$\text{Donc : } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad (\sin)'(x) > 0 \text{ et } (\sin)'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Elle est continue, donc elle définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-1,1]$.

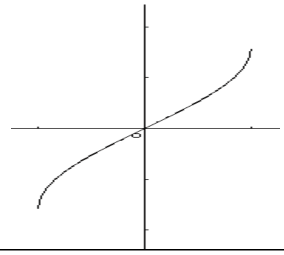
<u>Définition</u> : La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$ et on appelle Arcsinus sa réciproque : $\forall x\in[-1,1]\quad y=\text{Arcsin}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

On obtient le tableau des valeurs usuelles :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}\, x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

<u>Théorème</u> : La fonction Arcsinus est définie, continue et strictement croissante sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, sa courbe est symétrique de celle du sinus par rapport à la première bissectrice.

x	-1		0		1
Arcsin'	$\|\|$	$+$	1	$+$	$\|\|$
Arcsin	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$



<u>Propriété 1</u> : La fonction Arcsinus est impaire : $\forall x\in[-1,1]\quad \text{Arcsin}(-x)=-\text{Arcsin}\, x$

<u>Démonstration</u> : On pose $\alpha=\text{Arcsin}\, x$ et $\beta=\text{Arcsin}(-x)$.

Donc $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Et : $\sin\beta=-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$.

Or si $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2}\le-\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Donc par injectivité : $\beta=-\alpha$.

<u>Propriété 2</u> : $\forall x\in[-1,1]\quad \text{Arcsin}\, x+\text{Arc}\cos x=\frac{\pi}{2}$.

<u>Démonstration</u> : On pose $\alpha=\text{Arcsin}\, x$ et $\beta=\text{Arc}\cos x$.

Donc $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $\beta\in[0,\pi]$. Et : $\cos\beta=\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Or si $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, alors $0\le\frac{\pi}{2}-\alpha\le\pi$. Donc par injectivité : $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

<u>Théorème</u> : La fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x\in]-1,1[\quad (\text{Arc}\sin)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration : On utilise : $\forall x \in [-1,1] \quad \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{Arc}\cos x$. Donc la fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et $(\text{Arcsin})'(x) = -(\text{Arc}\cos)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

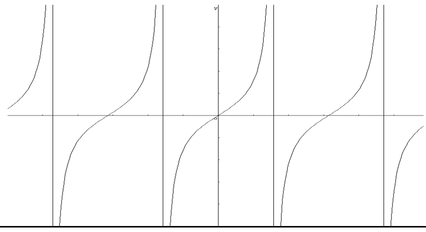
3) **Fonction tangente**

Théorème : La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$, impaire et périodique de période π.

Il suffit donc de l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

La parité permet par symétrie par rapport à l'origine d'obtenir la courbe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La périodicité permet par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$ d'obtenir toute la courbe.



Théorème : La fonction tangente est continue et dérivable sur D :

$$\forall x \in D \quad (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Donc : $\forall x \in D \quad (\tan)'(x) > 0$.

Donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est continue, donc elle définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]\lim_{x \to -(\pi/2)^+} \tan x, \lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x\right[=]-\infty, +\infty[$.

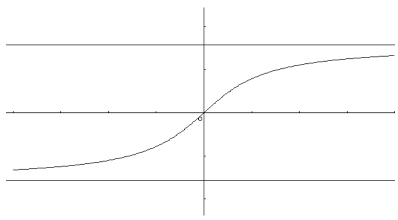
Définition : La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et on appelle Arctangente sa réciproque : $\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \text{Arctan}\, x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On obtient le tableau des valeurs usuelles :

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}\, x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Théorème : La fonction Arctangente est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle, sa courbe est symétrique de celle de la fonction tangente par rapport à la première bissectrice.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(\text{Arctan})'$	$\|\|$	$+$	1	$+$	$\|\|$
Arctan	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$



<u>Propriété 1</u> : La fonction Arctangente est impaire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}\, x$

<u>Démonstration</u> : On pose $\alpha = \text{Arctan}\, x$ et $\beta = \text{Arctan}(-x)$.

Donc $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et : $\tan\beta = -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$.

Or si $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < \frac{\pi}{2}$. Donc par injectivité : $\beta = -\alpha$.

<u>Propriété 2</u> : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

<u>Démonstration</u> : On pose $\alpha = \text{Arctan}\, x$ et $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et : $\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Or si $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < \frac{\pi}{2}$. Donc par injectivité : $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

<u>Théorème</u> : La fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Démonstration</u> : Soit a et x réels avec $x \neq a$. Le taux d'accroissement est :

$T(x) = \frac{\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, a}{x-a} = \frac{y-b}{\tan y - \tan b}$ avec $y = \text{Arctan}\, x$ et $b = \text{Arctan}\, a$.

Or la fonction Arctangente est continue. Donc $\lim_{x \to a} \text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, a$.

Donc : $\lim_{x \to a} T(x) = \lim_{y \to b} \frac{y-b}{\tan y - \tan b}$ si elle existe.

La fonction tangente est dérivable sur D et $\forall y \in D \quad (\tan)'(y) = 1 + \tan^2 y$.

Donc : $\lim_{y \to b} \frac{\tan y - \tan b}{y-b} = 1 + \tan^2 b = 1 + a^2$ $(\neq 0)$. Donc : $\lim_{x \to a} T(x) = \frac{1}{1+a^2}$.

Donc la fonction Arctangente est dérivable en a et $(\text{Arctan})'(a) = \frac{1}{1+a^2}$.