SERIES NUMERIQUES

I – Généralités sur les séries numériques

1) Définition

Lorsqu'une suite est définie comme somme de *n* termes, l'étude de chacun des termes de la somme permet d'étudier la suite. Le vocabulaire utilisé est alors un peu différent de celui des suites.

Définition : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle série numérique de terme général u_n la suite numérique (S_n) dont le terme général est défini pour tout $n \geq n_0$ par : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Les réels S_n sont appelés sommes partielles de rang *n* de la série.

La série numérique de terme général u_n est notée $(\sum u_n)$ ou $\sum u_n$.

Exemple 1 : La série de terme général *n* a pour sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 2 : La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ a pour sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} .$$

Dans ces deux cas, on peut exprimer S_n , mais ce n'est pas toujours le cas.

Remarque 1 : On s'intéresse aux sommes de *n* termes et pas aux produits de *n* termes car (au moins dans le cas où les termes sont positifs), il suffit de prendre le logarithme du produit pour se ramener à une somme : $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Le produit des termes d'une suite est donc une série « cachée ».

Remarque 2 : Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique : $\sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_{n_0}$.

Donc toute suite numérique (u_n) peut être étudiée soit en tant que suite comme précédemment, soit en tant que somme partielle de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

2) Convergence d'une série

Définition : La série de terme général u_n est convergente si la suite (S_n) des sommes partielles de rang *n* est convergente.

La somme d'une série convergente est : $S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Le reste d'ordre *n* d'une série convergente est : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Définition : La série est divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple 1 : La série de terme général n est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$.

Exemple 2 : La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente et a pour somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2$

Remarque : La convergence ou la divergence d'une série (on dit la nature de la série) ne dépend pas des premiers termes. C'est pourquoi on parle de la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, sans préciser son premier terme. Par contre, la somme de la série dépend évidemment du premier terme. Par exemple, la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 1$ converge et a pour somme 1.

On peut remarquer que pour tout $n \geq n_0 + 1$: $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or si la série converge, S_n et S_{n-1} ont même limite S. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème : Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Et donc si le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série est nécessairement divergente. Avant d'étudier la convergence d'une série, c'est donc la première chose à observer. Mais cette condition n'est pas suffisante : il existe de séries divergentes dont le terme général tend vers 0.

Exemple : On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et de premier terme 1, que l'on appelle série harmonique. On a bien sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Mais pour tout $n \geq 1$:

$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Donc $S_{2n} - S_n \geq n \times \frac{1}{2n}$. Donc $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

Or si la série convergeait, $(S_{2n} - S_n)$ tendrait vers 0 ce qui n'est pas possible.

Donc la série harmonique est divergente bien que son terme général tende vers 0.

II – Séries usuelles

1) Séries géométriques

Définition : On appelle série géométrique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = x^n$ où x est un réel.

Pour que la série converge, il est nécessaire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc que $-1 < x < 1$.

On a vu $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Donc si $-1 < x < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$. Elle converge.

Théorème : La série géométrique de terme général x^n est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et dans ce cas : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

2) Séries dérivées des séries géométriques

On en déduit les séries « dérivées » utiles dans les calculs d'espérance et de variance de variables aléatoires.

Rappel : Si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} x^n = 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

La première est la série de terme général nx^{n-1}. La somme partielle est $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

Pour que la série converge, il faut que le terme général tende vers 0, donc $-1 < x < 1$.

Alors : $(1-x)S_n = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1)x^{j} - \sum\limits_{j=1}^{n} jx^{j}$

en posant $j = k-1$ dans la première somme et $j = k$ dans la deuxième.

Donc : $(1-x)S_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1)x^{j} - \sum\limits_{j=1}^{n} jx^{j} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} x^{j} - nx^{n}$.

On reconnaît une somme partielle de la série géométrique et un terme qui tend vers 0.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-x)S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

Théorème : La série de terme général nx^{n-1} est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et dans ce cas : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

La somme de la série dérivée première de la série géométrique est la dérivée de la somme de la série géométrique.

En dérivant deux fois, on obtient une autre série de terme général $n(n-1)x^{n-2}$.

Pour que la série converge, il faut que le terme général tende vers 0, donc $-1 < x < 1$.

Alors : $(1-x)S_n = (1-x)\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-1}$.

Dans la première somme on pose $j = k-1$ et dans la deuxième $j = k$:

$$(1-x)S_n = \sum_{j=1}^{n-1} j(j+1)x^{j-1} - \sum_{j=2}^{n} j(j-1)x^{j-1} = \sum_{j=1}^{n-1} [j(j+1) - j(j-1)]x^{j-1} - n(n-1)x^{n-1}$$

Donc : $(1-x)S_n = 2\sum\limits_{j=1}^{n-1} jx^{j-1} - n(n-1)x^{n-1}$.

On reconnaît une somme partielle de la série dérivée première de la série géométrique et un terme qui tend vers 0. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-x)S_n = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Théorème : La série de terme général $n(n-1)x^{n-2}$ est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et dans ce cas : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Plus généralement, on démontre la formule suivante :

Formule du binôme négatif : Pour tout $p \in \mathbf{N}$, la série de terme général $\dbinom{n}{p} x^{n-p}$ est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et dans ce cas : $\sum\limits_{k=p}^{+\infty} \dbinom{k}{p} x^{k-p} = \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

$\dbinom{n}{p} x^{n-p} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} x^{n-p} \sim \dfrac{n^{p+1}}{(p+1)!} x^{n-p}$ donc $\dbinom{n}{p} x^{n-p} \sim \dfrac{n^{p}}{p!} x^{n-p}$.

Pour que la série converge, il faut que son terme général tende vers 0, donc $-1 < x < 1$.

On suppose donc que $-1 < x < 1$ et on montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\binom{n}{p} x^{n-p}$ converge et que sa somme est $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$.

<u>Initialisation</u> : Pour $p = 0$, c'est la série géométrique. Donc c'est démontré.

<u>Hérédité</u> : On suppose que la série de terme général $\binom{n}{p} x^{n-p}$ est convergente et de somme $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^{k-p} = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$. On note la somme partielle $S_n^p = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} x^{k-p}$.

On considère la somme partielle de la série S_n^{p+1} de terme général $\binom{n}{p+1} x^{n-p-1}$:

$$(1-x)S_n^{p+1} = (1-x)\sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p+1} x^{k-p-1} = \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p+1} x^{k-p-1} - \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k}{p+1} x^{k-p}$$

Dans la première somme, on pose $j = k-1$ et dans la deuxième $j = k$:

$$(1-x)S_n^{p+1} = \sum_{j=p}^{n-1} \binom{j+1}{p+1} x^{j-p} - \sum_{j=p+1}^{n} \binom{j}{p+1} x^{j-p}.$$

$$(1-x)S_n^{p+1} = 1 - \binom{n}{p+1} x^{n-p} + \sum_{j=p+1}^{n-1} \left[\binom{j+1}{p+1} - \binom{j}{p+1} \right] x^{j-p}.$$

$$(1-x)S_n^{p+1} = 1 - \binom{n}{p+1} x^{n-p} + \sum_{j=p+1}^{n-1} \binom{j}{p} x^{j-p} = \sum_{j=p}^{n-1} \binom{j}{p} x^{j-p} - \binom{n}{p+1} x^{n-p}$$

$$(1-x)S_n^{p+1} = S_{n-1}^p - \binom{n}{p+1} x^{n-p} = S_{n-1}^p - \frac{n(n-1)...(n-p)}{(p+1)!} x^{n-p}.$$

Par hypothèse de récurrence : $\lim_{n \to +\infty} S_{n-1}^p = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$ car $-1 < x < 1$.

Et $\frac{n(n-1)...(n-p)}{(p+1)!} x^{n-p} \sim \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} x^{n-p}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)...(n-p)}{(p+1)!} x^{n-p} = 0$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} S_n^{p+1} = \frac{1}{(1-x)^{p+2}}$.

Donc la série converge et sa somme est $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^{k-p-1} = \frac{1}{(1-x)^{p+2}}$.

<u>Conclusion</u> : Le théorème est démontré pour tout entier *p*.

3) Séries exponentielles

Il y a un cas important que l'on rencontre en probabilités : les séries exponentielles.
L'étude est faite en exercice dans le chapitre d'intégration.

<u>Définition</u> : On appelle série exponentielle toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{x^n}{n!}$ où *x* est un réel.

Le premier terme est donc 1. Dans un exercice, on a démontré que le terme général tend vers 0 quel que soit le réel *x*. Montrons que la série est convergente pour $x \geq 0$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On remarque que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad S'_n(x) = S_{n-1}(x)$.

Posons : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f_n(x) = S_n(x)e^{-x}$.

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f'_n(x) = S'_n(x)e^{-x} - S_n(x)e^{-x} = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Or : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \le e^{-x} \le 1$. Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad -\dfrac{x^n}{n!} \le f'_n(x) \le 0$.

Donc la fonction f_n est décroissante : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f_n(x) \le f_n(0)$, donc $f_n(x) \le 1$.

L'autre inégalité montre que la fonction $g_n : x \mapsto f_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est croissante.

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad g_n(x) \ge g_n(0)$, donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad g_n(x) \ge 1$.

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f_n(x) \ge 1 - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Donc, en rassemblant : $\forall x \in [0,+\infty[\quad 1 - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le f_n(x) \le 1$

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad \left[1 - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]e^x \le S_n(x) \le e^x$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Donc, d'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = e^x$.

Donc la série est convergente pour tout $x \ge 0$ et sa somme est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

On démontrera plus loin que ce résultat est aussi vrai pour $x < 0$.

<u>Théorème</u> : La série exponentielle de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ et de premier terme 1 converge pour tout réel x et sa somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

4) Séries de Riemann

<u>Définition</u> : On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement positif.

On peut d'abord remarquer que ce sont des séries à termes positifs, donc que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ est croissante. Donc deux cas sont possibles :

- la suite (S_n) est majorée, donc elle converge et la série est convergente.
- la suite n'est pas majorée, donc elle diverge vers $+\infty$ et la série est divergente.

On a déjà étudié le cas $\alpha = 1$. On a montré que la suite (S_n) ne peut pas converger car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} - S_n \ge \dfrac{1}{2}$, et donc $S_{2n} - S_n$ ne peut pas tendre vers 0.

Donc pour $\alpha = 1$, la série (harmonique) est divergente.

D'autre part, si $\alpha \le 1$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k^\alpha \le k$, donc $\dfrac{1}{k} \le \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Donc la suite (S_n) est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$. Donc (S_n) diverge vers $+\infty$. Donc la série diverge pour $\alpha \leq 1$.

Supposons maintenant $\alpha > 1$ et posons : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$.

On a : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$

$\forall x \in [0,+\infty[\quad 1+x \geq 1$, et donc, puisque $\alpha > 1$, on a : $\forall x \in [0,+\infty[\quad (1+x)^{\alpha-1} \geq 1$.

Donc : $\forall x \in [0,+\infty[\quad f'(x) \geq 0$. Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$.

Donc $\forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) \geq f(0)$, donc $f(x) \geq 0$, donc $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Donc, en particulier : $\forall k \geq 2 \quad \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^\alpha \geq 1 + \frac{\alpha}{k-1}$.

Donc : $\forall k \geq 2 \quad \frac{k^\alpha}{(k-1)^\alpha} \geq \frac{k-1+\alpha}{k-1}$, donc $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \geq \frac{1}{k^{\alpha-1}} + \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$.

Donc : $\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right]$.

Donc : $S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right]$. Donc : $S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

La suite (S_n) est majorée, donc elle converge et la série est convergente pour $\alpha > 1$.

> <u>Théorème</u> : La série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$, et divergente si $\alpha \leq 1$.

<u>III – Quelques critères de convergence</u>

1) <u>Combinaison linéaire de séries convergentes</u>

> <u>Théorème</u> : Si u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries convergentes, alors, pour tous réels α et β, la série de terme général $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est convergente et sa somme est : $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \alpha\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \beta\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

En effet, la somme partielle est : $\sum_{k=0}^{n} w_k = \alpha\sum_{k=0}^{n} u_k + \beta\sum_{k=0}^{n} v_k$.

On essaie ainsi de faire apparaître des séries usuelles dont on connaît la convergence.

<u>*Exemple*</u> : $u_n = \frac{n^2+n+1}{4^n} = \frac{1}{16}n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On reconnaît trois séries (géométriques et dérivées) convergentes car $-1 < \frac{1}{4} < 1$.

Donc la série converge et : $S = \frac{1}{16} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{68}{27}$.

<u>Conséquence</u> : Si l'on additionne une série convergente et une série divergente, on obtient une série divergente. Mais si l'on additionne deux séries divergentes, on ne peut pas conclure.

2) Cas des séries à termes positifs

$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Donc si la série est à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Donc elle converge si et seulement si elle est majorée.

Théorème : Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

En fait, il suffit que tous les termes soient positifs à partir d'un certain rang.
On a déjà utilisé ce critère pour les séries de Riemann.
On a également utilisé pour les séries de Riemann des majorations et des minorations par d'autres séries.

3) Majoration ou minoration

Théorème : Si u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries à termes positifs et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors :

- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.
- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

En effet, si $\forall n \geq p \quad u_n \leq v_n$, on a : $\forall n \geq p \quad \sum_{k=p}^{n} u_k \leq \sum_{k=p}^{n} v_k$.

Si la série de terme général u_n est divergente, la somme $\sum_{k=p}^{n} v_k$ est minorée par $\sum_{k=p}^{n} u_k$ qui tend vers l'infini, donc $\sum_{k=p}^{n} v_k$ tend vers l'infini de même que $\sum_{k=0}^{n} v_k$, et donc la série de terme général v_n est divergente.

Si la série de terme général v_n est convergente, la somme $\sum_{k=p}^{n} u_k$ est majorée de même que $\sum_{k=0}^{n} u_k$, et donc la série de terme général u_n est convergente.

Les paragraphes suivants en sont des applications.

4) Négligeabilité

Théorème : Si u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$, alors :

- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.
- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.

En effet, il existe une suite (ε_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Donc par définition de la limite : $\exists p \quad \forall n \geq p \quad 0 < \varepsilon_n \leq 1$, donc $u_n \leq v_n$.
On applique alors le théorème précédent.

5) Equivalence

Théorème : Si u_n et v_n sont les termes généraux de deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$, alors les deux séries sont de même nature.

En effet, il existe une suite (ε_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$.

Donc, il existe un rang p tel que : $\forall n \geq p \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$, donc $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{2}$.

Donc : $\forall n \geq p \quad \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$, et donc : $\forall n \geq p \quad \frac{2}{3}u_n \leq v_n \leq 2u_n$.

Si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n est convergente car elle est majorée par la série de terme général $2u_n$ qui est convergente.

Si la série de terme général u_n est divergente, la série de terme général v_n est divergente car elle est minorée par la série de terme général $\frac{2}{3}u_n$ qui est convergente.

Exemple : $u_n = \frac{3n+4}{n^3+5n^2+n+7}$. Donc $u_n \sim \frac{3}{n^2}$. On reconnaît une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$). Donc la série est convergente.

Remarque : Les deux séries sont de même nature, mais n'ont pas la même somme.

6) Convergence absolue

Les théorèmes précédents ne s'appliquent que pour les séries à termes positifs.

En réalité, lorsque l'on a une série à termes négatifs, en considérant la série de terme général opposé, on se ramène aux cas précédents.

Donc en fait les résultats précédents sont vrais pour des séries dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.

Quand le terme général u_n de la série ne garde pas un signe constant, on essaie de se ramener à une série à termes positifs, la plus simple étant la série $\sum |u_n|$.

Définition : La série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Pour préciser le lien entre ces deux séries, on va définir deux séries auxiliaires à termes positifs de termes généraux : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.

Donc si $u_n \geq 0$, alors : $u_n^+ = u_n$ et $u_n^- = 0$. Et si $u_n \leq 0$, alors : $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

On a donc les sommes partielles des séries :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^- \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ + \sum_{k=0}^{n} u_k^-$$

Si la série est absolument convergente, alors la suite (T_n) est convergente et majorée par la somme $T = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k^+ \leq T_n \leq T$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k^- \leq T_n \leq T$.

Donc les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes car leurs sommes partielles sont majorées.

Donc la série $\sum u_n$ est convergente comme différence de deux séries convergentes.

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple : On a montré la convergence de la série exponentielle pour $x \geq 0$.

Pour $x < 0$, on a : $\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!}$, et $|x| \geq 0$. On est donc ramené au cas précédent, donc la série exponentielle est absolument convergente, donc convergente.

Mais ce n'est qu'une condition suffisante : il existe des séries qui sont convergentes sans être absolument convergentes : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Donc, si les termes de la série ne sont pas de signe constant, on considère la série de terme général $|u_n|$ et on essaie de montrer que la série est absolument convergente, donc convergente. Mais cela ne fonctionne pas toujours !