SUITES NUMERIQUES

I – Suites numériques usuelles

Dans tous les théorèmes, pour ne pas surcharger les notations, les suites seront définies sur $\mathbb{N}$, mais dans les exemples, elles seront parfois définies sur $\mathbb{N}^*$. Dans le cas des suites arithmétiques et géométriques, les deux expressions du terme général sont données. Et comme les autres suites les utilisent, la transposition se fera facilement.

1) Rappels sur les suites arithmétiques

Définition : Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel b tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + b$. Le réel b est la raison de la suite arithmétique.

Le réel b ne dépend pas de n. Les suites arithmétiques sont donc caractérisées par le fait que la différence de deux termes consécutifs est constante.
En raisonnant par récurrence, on démontre le théorème suivant :

Théorème : Si la suite (u_n) est arithmétique de raison b, alors :

- si le premier terme est u_0, alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nb$.
- si le premier terme est u_1, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = u_1 + (n-1)b$.

Plus généralement, pour tous les entiers n et p, on a : $u_n = u_p + (n-p)b$.

En effet : $u_n = u_0 + nb$ et $u_p = u_0 + pb$, donc $u_n - u_p = (n-p)b$.

Cette formule permet de retrouver les deux expressions du terme général données précédemment.

2) Rappels sur les suites géométriques

Elles sont analogues aux suites arithmétiques en remplaçant l'addition par la multiplication.

Définition : Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel $a \neq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n$. Le réel a est la raison de la suite géométrique.

Le réel a ne dépend pas de n. Les suites géométriques sont donc caractérisées par le fait que le quotient de deux termes consécutifs est constant (dans le cas où les termes de la suite sont non nuls).
En raisonnant par récurrence, on démontre le théorème suivant :

Théorème : Si la suite (u_n) est géométrique de raison a, alors :

- si le premier terme est u_0, alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n u_0$.
- si le premier terme est u_1, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a^{n-1} u_1$.

Plus généralement, pour tous les entiers n et p, on a : $u_n = a^{n-p} u_p$

En effet : $u_n = a^n u_0$ et $u_p = a^p u_0$, donc $\dfrac{u_n}{u_p} = \dfrac{a^n u_0}{a^p u_0} = \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Le calcul est analogue si le premier terme est u_1.

3) Suites arithmético-géométriques

Ces deux types de suites permettent d'étudier un cas un peu plus général que l'on rencontre souvent en probabilités :

Définition : Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe des réels a et b ($a \neq 0$) tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$.

Les réels *a* et *b* sont constants (indépendants de *n*).
Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison *b*.
Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison *a*.
Dans tous les autres cas, elle n'est ni arithmétique, ni géométrique, et donc ne possède pas de raison ! On va déterminer l'expression de son terme général.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$. Puisque $a \neq 1$, cette équation possède une unique solution $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ appelée <u>point fixe</u> de la suite. Donc $\alpha = a\alpha + b$.
On introduit alors une suite auxiliaire en posant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \alpha$. Donc :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = (au_n + b) - (a\alpha + b) = au_n + b - a\alpha - b = a(u_n - \alpha) = av_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison *a*.

Donc d'après les résultats sur les suites géométriques : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = a^n v_0$.
On connaît u_0, donc on peut en déduire $v_0 = u_0 - \alpha$, et donc l'expression de v_n.
Et on calcule u_n en remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + \alpha$.

<u>Théorème</u> : Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, l'équation $x = ax + b$ possède une unique solution α appelée point fixe de la suite et la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison *a*.

La méthode d'étude est donc :
- Déterminer le réel α (point fixe) qui vérifie $\alpha = a\alpha + b$.
- Définir la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$. Elle est géométrique de raison *a*.
- En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.
- En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

<u>*Exemple*</u> : La suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$ est arithmético-géométrique avec $a = 3$ et $b = -4$.
Son point fixe α est solution de $x = 3x - 4$. Donc $\alpha = 2$.
On introduit alors une suite auxiliaire en posant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 2$.
La uite de terme général v_n est une suite géométrique de raison 3 (mais pas u_n).
Donc d'après les résultats sur les suites géométriques : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3^n v_0$.
Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 2$. Donc $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -3^n$.
Et d'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 2$.
Donc l'expression du terme général de la suite est : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 - 3^n$.

4) <u>Suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2</u>

<u>Définition</u> : Une suite (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 s'il existe des réels *a* et *b* tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $b \neq 0$.

Les réels *a* et *b* sont indépendants de *n*. On supposera $b \neq 0$, sinon la suite est géométrique.
La première fois où l'on peut utiliser la relation est $n = 0$: $u_2 = au_1 + bu_0$. Donc pour définir la suite, il faut donner ses deux premiers termes.
Pour déterminer l'expression du terme général u_n, on va se ramener à des suites géométriques.

Soit q un réel. On introduit la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - qu_n$.

Donc : $v_{n+1} = u_{n+2} - qu_{n+1} = (a-q)u_{n+1} + bu_n = (a-q)v_n + (aq - q^2 + b)u_n$.

Donc si $q^2 = aq + b$, la suite (v_n) est géométrique de raison $(a-q)$.

<u>Définition</u> : L'équation $x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire d'ordre 2.

Cette équation a pour discriminant : $\Delta = a^2 + 4b$.

<u>1^er^ cas</u> : $\Delta > 0$.

L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes q_1 et q_2.

Donc on peut construire deux suites géométriques :

- La suite de terme général $v_n = u_{n+1} - q_1 u_n$ est géométrique de raison $a - q_1 = q_2$.
- La suite de terme général $w_n = u_{n+1} - q_2 u_n$ est géométrique de raison $a - q_2 = q_1$.

Donc : $v_n = q_2^n v_0$ et $w_n = q_1^n w_0$. Or : $u_n = \dfrac{v_n - w_n}{q_2 - q_1} = \dfrac{q_2^n v_0 - q_1^n w_0}{q_2 - q_1} = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$.

<u>Théorème</u> : Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles distinctes q_1 et q_2. Alors pour toute suite (u_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, il existe des coefficients réels α et β uniques tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$.

L'unicité vient des conditions initiales car : $\alpha = \dfrac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1}$ et $\beta = \dfrac{q_1 u_0 - u_1}{q_1 - q_2}$.

<u>Exemple</u> : On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

L'équation caractéristique a deux racines distinctes 2 et 3.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 \times 2^n - 4 \times 3^n$.

<u>2^ème^ cas</u> : $\Delta < 0$.

Le raisonnement est identique au précédent mais dans $\mathbb{C}$.

Donc, d'après la démonstration précédente, il existe deux complexes uniques λ et μ tels que : $u_n = r^n(\lambda e^{ni\theta} + \mu e^{-ni\theta}) = r^n[(\lambda + \mu)\cos n\theta + i(\lambda - \mu)\sin n\theta]$.

Or u_n est réel. Donc $u_n = \overline{u_n} = r^n(\bar{\lambda} e^{-ni\theta} + \bar{\mu} e^{ni\theta})$. Donc par unicité, $\bar{\lambda} = \mu$ et $\bar{\mu} = \lambda$.

Donc λ et μ sont complexes conjugués : $\lambda = x + iy$ et $\mu = x - iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Donc : $u_n = r^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$ où $\alpha = 2x = \lambda + \mu$ et $\beta = -2y = i(\lambda - \mu)$.

<u>Théorème</u> : Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ possède deux racines complexes conjuguées $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = re^{-i\theta}$. Alors pour toute suite (u_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, il existe des coefficients réels α et β uniques tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r^n(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$.

L'unicité de α et β vient des conditions initiales car : $u_0 = \alpha$ et $u_1 = r(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta)$ et donc $\alpha = u_0$ et $\beta = \dfrac{u_1 - ru_0 \cos\theta}{\sin\theta}$ car $\sin\theta \neq 0$.

<u>Exemple</u> : On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

L'équation caractéristique a deux racines distinctes $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2(\sqrt{2})^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

<u>3$^{\text{ème}}$ cas</u> : $\Delta=0$.

L'équation caractéristique a une racine double $q=\dfrac{a}{2}$. Or $\Delta=0$ donc $b=-\dfrac{a^2}{4}=-q^2$.

On peut remarquer que $q\neq 0$ car sinon, on aurait $a=b=0$ et $\forall n\geq 2\quad u_n=0$.

La suite de terme général $v_n=u_{n+1}-qu_n$ est géométrique de raison $a-q=q$.

Donc $v_n=q^n v_0$. Donc : $u_{n+1}=qu_n+q^n v_0$. Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{u_n}{q^n}+\dfrac{v_0}{q}$.

Donc la suite de terme général $w_n=\dfrac{u_n}{q^n}$ est arithmétique de raison $\dfrac{v_0}{q}$.

Donc : $w_n=w_0+n\dfrac{v_0}{q}=\alpha n+\beta$. Donc : $u_n=(\alpha n+\beta)q^n$.

<u>Théorème</u> : Si $\Delta=0$, alors l'équation caractéristique $x^2=ax+b$ possède une racine double *q*. Alors pour toute suite (u_n) qui vérifie $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$, il existe des réels α et β uniques tels que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=(\alpha n+\beta)q^n$.

L'unicité de α et β vient des conditions initiales car : $u_0=\beta$ et $u_1=q(\alpha+\beta)$ et donc $\beta=u_0$ et $\alpha=\dfrac{u_1-qu_0}{q}$.

<u>*Exemple*</u> : On considère la suite définie par $u_0=1$, $u_1=6$ et par la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=-4u_{n+1}-4u_n$.
L'équation caractéristique a une racine double (-2).

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=(1-4n)(-2)^n$.

<u>II – Généralités sur les suites numériques</u>

1) <u>Définition</u>

<u>Définition</u> : Une suite numérique est une application *u* d'une partie *I* non vide de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'image $u(n)$ de l'entier *n* est notée u_n et appelée terme général de la suite. Et cette suite est notée $(u_n)_{n\in I}$ ou plus simplement (u_n).

En général, $I=\mathbb{N}$ ou $I=\mathbb{N}^*$, ou au pire un intervalle $[\![n_0,+\infty[\![$ de $\mathbb{N}$.
On ne s'intéressera ici qu'aux suites de réels. Mais en fin de chapître, on dira quelques mots des suites de complexes.
Une suite numérique est donc une fonction numérique dont l'ensemble de définition est une partie *I* de $\mathbb{N}$ (en général $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$*****). Donc de nombreuses définitions et propriétés des fonctions restent valables pour les suites. Par contre, toutes les notions ne pourront pas être utilisées, puisque certaines, comme la dérivation par exemple, nécessitent que l'ensemble de définition soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On sera donc parfois amenés à utiliser des méthodes différentes. On peut également remarquer que, puisque $\mathbb{N}$ est une succession de points isolés, on ne pourra pas chercher des limites en un point, et donc que la seule limite à laquelle il sera légitime de s'intéresser sera la limite quand *n* tend vers $+\infty$.

2) Modes de définition d'une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite numérique.

- *Exemple 1* : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ou $u_n = \ln(n^2+1)$ ou $u_n = e^{-n}$. Le terme général u_n est de la forme : $u_n = f(n)$ où *f* est une fonction définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de ℝ. Les propriétés de *f* (sens de variation, limites, …) permettront d'étudier la suite numérique.
- *Exemple 2* : $u_n = n! = \prod_{k=1}^{n} k$ ou $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$. Le terme général u_n est exprimé en fonction de *n*, mais la suite n'est pas la restriction à ℕ d'une fonction. C'est en particulier le cas lorsque u_n est défini par une somme ou un produit. Pour étudier la suite, on sera soit amené à transformer l'expression de u_n pour se ramener au cas précédent, soit amené à étudier les propriétés de chaque terme de la somme ou du produit. Ce cas fera l'objet d'un autre chapître (étude des séries).
- *Exemple 3* : L'équation $\ln(x+1) = x^n$ possède une unique solution u_n dans $]0,+\infty[$. On connaît en fonction de *n* l'existence de u_n, mais on ne dispose pas de l'expression de u_n. On dit que la suite est définie de manière implicite.
- *Exemple 4* : $u_0 = 1$ et $\forall \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} = 3u_n + 4$ ou $u_{n+1} = \ln(2+u_n)$. On donne le procédé de calcul du terme général u_n en fonction des termes précédents u_{n-1}, $u_{n-2}, \ldots$ et on précise les premiers termes de la suite. On dit alors que la suite est définie par récurrence. L'exemple le plus courant est celui où $u_{n+1} = f(u_n)$. Et l'étude des propriétés de *f* permettra l'étude de la suite.

3) Sens de variation

On supposera dans ce qui suit que la suite est définie sur ℕ. La suite sera donc croissante si pour tous *n* et *p* de ℕ vérifiant $n \le p$, alors $u_n \le u_p$. Donc si la suite est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \le u_{n+1}$. Réciproquement, on voit que si cette propriété est vérifiée et si $n \le p$: $u_n \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le \ldots \le u_p$. La condition est donc suffisante.

Définitions : La suite (u_n) est :

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \le u_{n+1}$, c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} - u_n \ge 0$.
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \ge u_{n+1}$, c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} - u_n \le 0$.
- monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.
- constante si $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = u_{n+1}$.
- stationnaire s'il existe un rang p tel que pour tout $n \ge p$: $u_n = u_p$.

Une suite peut aussi être croissante ou décroissante à partir d'un rang p.

Pour étudier le sens de variations d'une suite, on étudie donc le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ en se souvenant que *n* appartient à *I*, donc à ℕ, et donc que $n \ge 0$.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_{n+1} - u_n \le 0$. La suite (u_n) est décroissante.

On peut aussi remarquer que si *f* est une fonction monotone sur un intervalle de ℝ contenant *I*, la suite définie par $\forall n \in I\quad u_n = f(n)$ a le même sens de variations que *f*.

En effet, par exemple si f est croissante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < n+1$, donc $f(n) \leq f(n+1)$, donc $u_n \leq u_{n+1}$.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ln(n^2+1)$. La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$ est croissante sur $[0,+\infty[$ car $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc la suite (u_n) est croissante.

Remarque : La réciproque est fausse : la suite peut être monotone sans que la fonction le soit. Par exemple : $u_n = n^2 - n$.

4) Majoration et minoration d'une suite

Les définitions sont les mêmes que pour les fonctions.

Définitions : La suite est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
La suite est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
La suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq n \leq n+1$, donc $0 \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

On peut aussi remarquer que si f est une fonction bornée sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant *I*, la suite définie par $\forall n \in I \quad u_n = f(n)$ admet les mêmes bornes que *f*.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{-n}$. La fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ est bornée sur $[0,+\infty[$: $x \geq 0$, donc $-x \leq 0$, donc $0 \leq e^{-x} \leq 1$. La suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ln(n^2+1)$. La fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$ est croissante sur $[0,+\infty[$, donc minorée par $f(0) = 0$. La suite (u_n) est minorée par 0, non majorée car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc u_n augmente indéfiniment si n augmente.

Remarque : La réciproque est fausse : une suite peut être majorée ou minorée sans que la fonction le soit. Par exemple : $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

Théorème : Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

5) Opérations sur les suites

La somme de deux suites (u_n) et (v_n) est la suite $(u_n + v_n)$.
Le produit de la suite (u_n) par le réel α est la suite (αu_n).
Le produit de deux suites (u_n) et (v_n) est la suite $(u_n v_n)$.
Le quotient de deux suites (u_n) et (v_n) est la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Une combinaison linéaire de (u_n) et (v_n) est une suite de la forme $(\alpha u_n + \beta v_n)$.

III- Convergence ou divergence d'une suite réelle

1) Suites convergentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini. Donc quand on parle d'une limite d'une suite, c'est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

<u>Définition</u> : Une suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que l'on puisse rendre $|u_n - \ell|$ aussi petit que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Cela se traduit mathématiquement par : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Cela signifie qu'à partir du rang n_0, tous les termes de la suite se trouvent dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

<u>Exemple</u> : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Donc $|u_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Donc, on peut rendre $|u_n - 1|$ aussi petit que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand. Par exemple pour rendre $|u_n - 1| < 0{,}01$ il suffit de prendre $n > 99$.

<u>Corollaire</u> : Si une suite (u_n) est convergente, alors la différence de deux termes consécutifs a pour limite 0.

En effet $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|u_{n+1} - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ car $n+1 \geq n \geq n_0$.

Or $|a+b| \leq |a| + |b|$, donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| \leq \varepsilon$.

<u>Conséquence</u> : Si la différence de deux termes consécutifs n'a pas pour limite 0, la suite n'est pas convergente.

<u>Théorème</u> : Si une suite (u_n) est convergente, le réel ℓ est unique. Il est appelé limite de la suite et on note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ.

<u>Démonstration</u> : On raisonne par l'absurde.
Supposons qu'il existe deux réels ℓ_1 et ℓ_2, et que $\ell_1 < \ell_2$. Donc :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad |u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad |u_n - \ell_2| < \varepsilon$.
Donc pour tout $n \geq \text{Max}(n_1, n_2)$, on a $u_n \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$ et $u_n \in]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$

Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, appliquons le pour $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$.

Pour tout $n \geq \text{Max}(n_1, n_2)$: $u_n \in \left]\dfrac{4\ell_1 - \ell_2}{3}, \dfrac{2\ell_1 + \ell_2}{3}\right[$ et $u_n \in \left]\dfrac{\ell_1 + 2\ell_2}{3}, \dfrac{4\ell_2 - \ell_1}{3}\right[$.

Or $\ell_1 < \ell_2$. Donc $\dfrac{2\ell_1 + \ell_2}{3} < \dfrac{\ell_1 + 2\ell_2}{3}$. Donc les deux intervalles ont une intersection vide. On aboutit donc à une contradiction.
Donc l'hypothèse de départ est fausse. Donc le réel ℓ est unique.
Avec un raisonnement analogue, on démontre les propriétés suivantes :

<u>Théorème</u> : Si la suite (u_n) converge vers le réel ℓ :

- Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \geq 0$, alors : $\ell \geq 0$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq 0$, alors : $\ell \leq 0$.
- Si, à partir d'un certain rang, $a \leq u_n \leq b$, alors : $a \leq \ell \leq b$.

Donc des propriétés de la suite donne des renseignements sur la limite éventuelle.
On peut remarquer que même si les inégalités sur u_n sont strictes, on ne peut conclure pour ℓ que des inégalités larges.

Par exemple, la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ dont les termes sont strictement positifs a pour limite 0.

Inversement, si la suite est convergente, des propriétés de la limite donne des renseignements sur la suite :

Théorème : Si la suite (u_n) converge vers le réel ℓ :
- Si $\ell > 0$, alors, à partir d'un certain rang, on a : $u_n > 0$.
- Si $\ell < 0$, alors, à partir d'un certain rang, on a : $u_n < 0$.
- Si $a < \ell < b$, alors, à partir d'un certain rang, on a : $a < u_n < b$.

On peut remarquer aussi que la convergence impose une certaine régularité :

Théorème : Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : Il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| < 1$. Donc à partir du rang n_0, les termes de la suite sont minorés par $(\ell - 1)$ et majorés par $(\ell + 1)$ et avant n_0, il n'y a qu'un nombre fini de termes et donc on peut minorer par le plus petit et majorer par le plus grand.

Corollaire : Une suite qui n'est pas bornée n'est pas convergente.

Exemple : Si $a > 1$, la suite de terme général $u_n = a^n$ est minorée par 1. Si elle était majorée par *M*, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a^n \leq M$, donc $n \ln a \leq \ln M$, donc $n \leq \dfrac{\ln M}{\ln a}$, ce qui évidemment n'est pas vrai. Donc la suite n'est pas majorée : elle ne converge pas.

Mais la réciproque est fausse car une suite peut être bornée sans être convergente . Par exemple : $u_n = (-1)^n$. Elle ne peut pas converger car tous les termes de rang pair sont égaux à 1, alors que les termes de rang impair sont égaux à (-1). Donc la différence de deux termes consécutifs vaut 2 et ne peut pas être arbitrairement majorée.

2) Suites divergentes

Définition : Une suite est divergente si elle n'est pas convergente. Il y a trois cas :
- La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) si u_n peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition de prendre *n* assez grand. Pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n > A$: $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_n > A$.
- La suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) si la suite de terme général $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$: $\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ u_n < -A$.
- La suite (u_n) diverge car son terme général u_n n'a pas de limite.

Exemple : $u_n = \ln(n^2 + 1)$. Donc $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{e^A - 1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Par exemple pour rendre $u_n > 30$, il suffit de prendre $n > 3\,269\,017$.

Un exemple du deuxième cas est $u_n = 1 - n^2$. En effet, $-u_n = n^2 - 1$, et donc $-u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A+1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Un exemple du troisième cas est $u_n = (-1)^n$. La suite ne converge pas car $u_{n+1} - u_n$ est 2 ou (-2), donc ne tend pas vers 0. Et la suite n'a pas de limite infinie.

Si *f* est une fonction qui admet une limite (réelle ou infinie) en $+\infty$, la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = f(n)$ admet la même limite que *f*. Mais la réciproque est fausse.

3) Opérations algébriques sur les limites

On retrouve des propriétés analogues à celles des limites de fonctions.

Examinons d'abord le cas des suites convergentes :

<u>Théorème</u> : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ' :

- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell + \ell'$.
- La suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
- La suite (ku_n) est convergente de limite $k\ell$ si k est un réel.
- La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite $\dfrac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

<u>Démonstration</u> : Dans le cadre du programme, ces théorèmes sont admis.
Par exemple pour la somme, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2 \quad |v_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc : $\forall n \geq Max(n_1, n_2) \quad |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon$.

Pour le produit par un réel $k \neq 0$: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |ku_n - k\ell| < \varepsilon$.

Pour le produit et le quotient, c'est un peu plus compliqué car il faut par exemple écrire : $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$ et majorer la valeur absolue.

Dans le cas général, on obtient les tableaux :

u_n	v_n	$u_n + v_n$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indétermination

$\lvert u_n\rvert$	$\lvert v_n\rvert$	$\lvert u_n v_n\rvert$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$+\infty$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$
$+\infty$	0	Indétermination
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\lvert u_n\rvert$	$\lvert v_n\rvert$	$\left\lvert \dfrac{u_n}{v_n} \right\rvert$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$
0	0	Indétermination
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
ℓ	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	Indétermination

Les tableaux des produits et des quotients sont à compléter par la règle des signes.
Les indéterminations sont à lever.

4) <u>Composition</u>

<u>Théorème</u> : Si (u_n) est une suite de limite ℓ (réelle ou infinie) et si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$ (réel ou infini), alors la suite $(f(u_n))$ a pour limite L.

<u>Démonstration</u> : On en parlera à propos des fonctions.

<u>Notation</u> : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ droite réelle achevée. Donc : $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>*Exemple*</u> : Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln a = +\infty$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln a} = +\infty$.

Si $0<a<1$, alors $\ln a<0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln a=-\infty$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. Donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln a}=0$.

5) Théorèmes de comparaison

D'autres propriétés sont liées à la relation d'ordre.

> Théorème de comparaison : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ', et si à partir d'un certain rang : $u_n\le v_n$, alors $\ell\le\ell'$.

Il suffit d'utiliser les premières propriétés vues sur les limites à la suite de terme général v_n-u_n. L'inégalité $\ell\le\ell'$ reste large même si $u_n<v_n$.

> Théorème d'encadrement : Si à partir d'un certain rang, $v_n\le u_n\le w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

En effet : $\forall n\ge n_0 \quad v_n-\ell\le u_n-\ell\le w_n-\ell$ donc $|u_n-\ell|\le \text{Max}(|v_n-\ell|,|w_n-\ell|)$.

Il faut bien remarquer que ce théorème (encore appelé théorème « des gendarmes ») est un théorème qui prouve la convergence de la suite et calcule sa limite.
Pour démontrer la convergence d'une suite, on peut donc l'encadrer entre deux suites qui convergent vers la même limite.

Exemple : $u_n=\dfrac{\text{Ent}(\sqrt{n})+1}{\text{Ent}(\sqrt{n})-1}$. On sait que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \text{Ent}(\sqrt{n})\le\sqrt{n}<\text{Ent}(\sqrt{n})+1$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \sqrt{n}<\text{Ent}(\sqrt{n})+1\le\sqrt{n}+1$ et $\sqrt{n}-2<\text{Ent}(\sqrt{n})-1\le\sqrt{n}-1$.

Donc : $\forall n\ge 5\quad \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\le u_n\le\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-2}=1$.

Donc la suite (u_n) converge vers 1.

On a également des théorèmes de comparaison pour les suites divergentes :

> Théorème de comparaison : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites, et si à partir d'un certain rang : $u_n\le v_n$, alors :
> - Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
> - Si la suite (v_n) diverge vers $-\infty$, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Pour démontrer qu'une suite diverge vers $+\infty$, il suffit donc de la minorer par une suite usuelle qui diverge vers $+\infty$. Et pour démontrer qu'une suite diverge vers $-\infty$, il suffit de la majorer par une suite usuelle qui diverge vers $-\infty$.

Exemple : $u_n=\sqrt[n]{n!}-n^2$. Par définition : $n!=\prod\limits_{k=1}^{n}k$. Donc $n!\le n^n$. Donc $\sqrt[n]{n!}\le n$.

Donc : $u_n\le n-n^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-n^2)=-\infty$. Donc la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

6) Cas des suites monotones

Bien sûr une suite peut converger sans être monotone. Mais si elle est monotone, on a le théorème suivant conséquence de la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

> Théorème de convergence monotone :
> Toute suite croissante majorée est convergente.
> Toute suite décroissante minorée est convergente.

Exemple : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$. La suite est croissante car $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)!}>0$.

Dans $k!$, tous les termes du produit sauf 1 sont supérieurs ou égaux à 2. Donc si $k \geq 2$, on a : $k! \geq 2^{k-1}$. Donc : $u_n \leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$. Donc : $\forall n \geq 2 \quad u_n \leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$.

Or $1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2^j}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$. Donc $\forall n \geq 2 \quad u_n \leq 2$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

<u>Remarque</u> : Une suite croissante convergente est minorée par son premier terme et majorée par sa limite. Une suite décroissante convergente est majorée par son premier terme et minorée par sa limite.

7) <u>Suites adjacentes</u>

<u>Définition</u> : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles sont monotones de sens contraires (l'une croissante et l'autre décroissante) et si $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Supposons par exemple que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

S'il existe un entier p tel que $v_p < u_p$, alors $\forall n \geq p \quad v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite (u_n) est croissante, majorée par v_0, donc convergente : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

La suite (v_n) est décroissante, minorée par u_0, donc convergente : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

Etant donnés les sens de variations des suites, et puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq \ell' \leq v_n$. Or $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$. Donc $\ell=\ell'$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$.

<u>Théorème</u> : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite. De plus, pour tout *n*, la limite est encadrée par u_n et v_n.

<u>*Exemple*</u> : Dans l'exemple précédent, on a montré que la suite est convergente, mais on n'a pas calculé sa limite. Pour trouver une valeur approchée, on compare les deux suites $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n.n!}$. On a évidemment : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n.n!}=0$.

Et $v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\frac{1}{n.n!}$.

Donc : $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{n(n+1).(n+1)!}<0$. La suite (v_n) est décroissante.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, et donc ont la même limite ℓ.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$. Donc en particulier pour $n=4$: $\frac{41}{24} \leq \ell \leq \frac{165}{96}$.

On obtient ainsi un encadrement de ℓ : $1{,}708 \leq \ell \leq 1{,}719$. En fait : $\ell = e-1$.

8) <u>Quelques suites de référence</u>

Si $a=0$, alors, pour tout *n*, $a^n=0$. Si $a=1$, alors, pour tout *n*, $a^n=1$. Si $a=-1$, alors, pour tout *n*, $a^n=(-1)^n$ et on a vu que cette suite n'a pas de limite.

Si $a>0$, alors $a^n=\left|a\right|^n$. Et si $a<0$, alors $a^n=(-\left|a\right|)^n=(-1)^n\left|a\right|^n$.

Or on a étudié la limite de a^n lorsque $a>0$. On l'applique à $|a|^n$.

On a vu que si $0<|a|<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a|^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$.

Et si $|a|>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a|^n=+\infty$. Donc si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$. Si $a<-1$, la suite n'a pas de limite car le signe n'est pas constant.

<u>Théorème</u> : La suite (a^n) est convergente si et seulement si $-1<a\le 1$. Elle a pour limite 0 si $-1<a<1$ et pour limite 1 si $a=1$. Elle diverge vers $+\infty$ si $a>1$ et n'a pas de limite si $a\le -1$.

Pour tout *n*, $n^\alpha=e^{\alpha\ln n}$. L'étude de la limite de n^α dépend donc du signe de α.

<u>Théorème</u> : La suite (n^α) est convergente si et seulement si $\alpha\le 0$. Elle a pour limite 0 si $\alpha<0$ et pour limite 1 si $\alpha=0$. Elle diverge vers $+\infty$ si $\alpha>0$.

$\dfrac{a^n}{n^\alpha}=e^{n\ln a-\alpha\ln n}=e^{n(\ln a-\alpha\frac{\ln n}{n})}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$. $\boxed{\text{Si } a>1 \text{ et } \alpha>0 : \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n^\alpha}=+\infty}$

Pour des raisons analogues : $\boxed{\text{Si } -1<a<1 \text{ et } \alpha>0 : \lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha a^n=0}$

IV – Comparaison des suites

Lorsque l'on veut chercher la limite de $u_n=n^2-5n$ ou de $v_n=n^2-3\ln n$, pour lesquels il y a une indétermination, on factorise par n^2 (« ce qui tend le plus vite vers l'infini »). On obtient :

$u_n=n^2\left(1-\dfrac{5}{n}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)=1$.

$v_n=n^2\left(1-3\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-3\dfrac{\ln n}{n^2}\right)=1$.

Donc u_n et v_n se comporte comme n^2 et les termes $5n$ et $3\ln n$ n'interviennent pas.

On dira que u_n et v_n sont « équivalents » à n^2 et que les termes $5n$ et $3\ln n$ sont « négligeables » devant n^2.

1) Négligeabilité

<u>Définition</u> : Une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) s'il existe une suite (ε_n) telle que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=v_n\varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. On note $u_n=o(v_n)$.

On dit aussi que la suite (v_n) domine la suite (u_n).

<u>Exemple</u> : $n=o(n^2)$ car $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad n=n^2\times\dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

<u>Théorème</u> : Si (v_n) est une suite qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

<u>Démonstration</u> : Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n\neq 0$, on peut poser $\varepsilon_n=\dfrac{u_n}{v_n}$, c'est-à-dire $u_n=v_n\varepsilon_n$.

Et $u_n=o(v_n)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$, donc si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

C'est une caractérisation des suites négligeables plus pratique que la définition, mais qui exclut des cas.

<u>Négligeabilités classiques</u> :

- $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $0 < \alpha < \beta$.
- $\ln n = o(n)$ et $n = o(e^n)$.
- $n^\alpha = o(e^{\beta n})$ avec α et β strictement positifs.
- $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ avec α et β strictement positifs.
- $n^\alpha = o(a^n)$ α réel et $|a| > 1$.

<u>Démonstration</u> : On démontre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ en utilisant les limites connues.

<u>Théorème</u> : Si $u_n = o(v_n)$ et si (v_n) admet une limite <u>finie</u>, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

<u>Démonstration</u> : En effet $u_n = v_n\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Si la limite est infinie, on ne peut pas conclure (indétermination).

<u>Propriétés</u> :

- Transitivité : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Compatibilité avec l'addition : si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$, alors $u_n + u'_n = o(v_n)$.
- Compatibilité avec le produit : si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$, alors $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$.
- Compatibilité avec les puissances <u>positives</u> : si $u_n = o(v_n)$ et si $\alpha > 0$, alors $|u_n|^\alpha = o(|v_n|^\alpha)$.
- Mais la relation n'est compatible ni avec le quotient ni avec la composition.

<u>Démonstrations</u> :

- <u>Transitivité</u> : si $u_n = v_n\varepsilon_n$ et $v_n = w_n\alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n = w_n\eta_n$ avec $\eta_n = \varepsilon_n\alpha_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- <u>Addition</u> : si $u_n = v_n\varepsilon_n$ et si $u'_n = v_n\alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n + u'_n = v_n\eta_n$ avec $\eta_n = \varepsilon_n + \alpha_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- <u>Produit</u> : si $u_n = v_n\varepsilon_n$ et si $u'_n = v'_n\alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n u'_n = v_n v'_n \eta_n$ avec $\eta_n = \varepsilon_n\alpha_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- <u>Puissance</u> : si $u_n = v_n\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $|u_n|^\alpha = |v_n|^\alpha |\varepsilon_n|^\alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n|^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$. C'est évidemment faux si $\alpha \le 0$.
- <u>Quotient</u> : $n = o(n^2)$ et $\dfrac{1}{n} = o(n^2)$ mais $\dfrac{n}{1/n} = n^2$ n'est pas négligeable devant n^2.
- <u>Composition</u> : $n = o(n^2)$ mais $\ln n$ n'est pas négligeable devant $\ln n^2 = 2\ln n$ puisque le quotient est égal à $\dfrac{1}{2}$.

2) Equivalence

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ε_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On note $(u_n) \sim (v_n)$ ou $u_n \sim v_n$.

Exemple : $n+1 \sim n$ car $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n+1 = n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Théorème : Si (v_n) est une suite qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Démonstration : Si, à partir d'un certain rang, on a $v_n \neq 0$, on peut poser $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{v_n} - 1$, c'est-à-dire $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.

Et $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, donc si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarque : C'est une caractérisation des suites équivalentes plus pratique que la définition. On s'en servira pour certaines démonstrations, mais il faut penser que l'on élimine des cas. Par exemple il n'existe pas de rang à partir duquel la suite $v_n = \sqrt{n} - \mathrm{Ent}(\sqrt{n})$ ne s'annule pas.

Equivalences classiques :

- Un polynôme non nul est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Une fraction rationnelle non nulle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\neq 0)$, alors $u_n \sim \ell$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors : $\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

  $\sin u_n \sim u_n \qquad \tan u_n \sim u_n \qquad 1 - \cos u_n \sim \dfrac{(u_n)^2}{2}$

Démonstration :

- Si $u_n = P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, alors $u_n = a_p n^p (1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n = \dfrac{a_{p-1}}{n a_p} + \ldots + \dfrac{a_1}{n^{p-1} a_p} + \dfrac{a_0}{a_p n^p}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Donc $u_n \sim a_p n^p$.

  Exemple : Si $u_n = 4n^3 - 5n^2 + 2n - 1$, alors $u_n \sim 4n^3$.

- Si $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$, on a, d'après ce qui précède, $P(n) = a_p n^p (1+\varepsilon_n)$ et $Q(n) = b_q n^q (1+\eta_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.

  $u_n = \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} \times \dfrac{1+\varepsilon_n}{1+\eta_n} = \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n - \eta_n}{1+\eta_n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_n - \eta_n}{1+\eta_n} = 0$. Donc $u_n \sim \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}$.

  Exemple : Si $u_n = \dfrac{5n^2 + 2n - 1}{n^3 + n^2 + n + 1}$, alors $u_n \sim \dfrac{5n^2}{n^3}$, donc $u_n \sim \dfrac{5}{n}$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\neq 0)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ell} = 1$ et donc $u_n \sim \ell$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n}-1}{u_n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$. Donc $e^{u_n}-1 \sim u_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ car :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{u_n} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \alpha .$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin u_n}{u_n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Donc $\sin u_n \sim u_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan u_n}{u_n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x} = 1$. Donc $\tan u_n \sim u_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $1-\cos u_n \sim \dfrac{(u_n)^2}{2}$ car :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos u_n}{(u_n)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

La notion d'équivalence va permettre de simplifier certaines recherches de limites.

<u>Théorème</u> : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes et si la suite (v_n) admet une limite finie ou infinie, alors la suite (u_n) admet la même limite.

<u>Démonstration</u> : En effet : $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (finie ou infinie) et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Inversement, deux suites qui ont la même limite ne sont pas toujours équivalentes : par exemple n et n^2, ou bien $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$. Ce n'est vrai que si la limite est réelle non nulle.

On utilise un équivalent d'une suite pour simplifier son expression et rechercher sa limite.

<u>Propriétés</u> :
- Symétrie : si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- Transitivité : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$.
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.
- Compatibilité avec le produit et avec le quotient (s'il existe) : si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$.
- Compatibilité avec les puissances : si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n|^\alpha \sim |v_n|^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Mais la relation n'est compatible ni avec l'addition ni avec la composition.

<u>Démonstrations</u> :
- <u>Symétrie</u> : si $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $v_n = u_n(1+\alpha_n)$ avec $\alpha_n = -\dfrac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

- Transitivité : si $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et $v_n = w_n(1+\alpha_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n = w_n(1+\eta_n)$ avec $\eta_n = \varepsilon_n + \alpha_n + \varepsilon_n\alpha_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- Troisième : si $u_n = v_n\varepsilon_n$ et $v_n = w_n(1+\alpha_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n = w_n\eta_n$ avec $\eta_n = \varepsilon_n(1+\alpha_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- Quatrième : $u_n \sim v_n$ équivaut à $u_n = v_n(1+\varepsilon_n) = v_n + v_n\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
- Produit : si $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et si $u'_n = v'_n(1+\alpha_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $u_n u'_n = v_n v'_n(1+\eta_n)$ avec $\eta_n = \varepsilon_n + \alpha_n + \varepsilon_n\alpha_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = 0$.
- Puissances : si $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $|u_n|^\alpha = |v_n|^\alpha |1+\varepsilon_n|^\alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\varepsilon_n) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |1+\varepsilon_n|^\alpha = 1$. Pour $\alpha = -1$, on obtient le quotient.
- Addition : $n^2 + n \sim n^2 + 1$ et $-n^2 + n \sim -n^2$, mais $2n$ n'est pas équivalent à 1.
- Composition : $1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$ mais $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ n'est pas équivalent à $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ car sinon par transitivité, on aurait $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ ce qui est faux.

  De même $n^2 + n \sim n^2$, mais $\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n$. Donc les suites de termes généraux e^{n^2+n} et e^{n^2} ne sont pas équivalentes.

V – Cas des suites de nombres complexes

Ce qui a été dit sur les suites usuelles réelles reste vrai : expressions des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ou récurrentes linéaires d'ordre 2.
Pour ce qui concerne la convergence, la définition est identique en remplaçant la valeur absolue par le module.

Définition : La suite (z_n) est convergente s'il existe un nombre complexe ℓ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |z_n - \ell| < \varepsilon$$

La suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Par contre, la notion de limite infinie n'a pas de sens.
On a toujours l'unicité de la limite si elle existe, ainsi que les opérations sur les limites finies. De plus :

Théorème : La suite (z_n) est convergente si et seulement si les suites de termes généraux $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

En effet pour tout complexe z :

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{Max}[|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|] \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{Max}[|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|]$$

Donc, si (z_n) converge vers ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(\ell)$ puisque : $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leq |z_n - \ell|$ et $|\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leq |z_n - \ell|$.
Réciproquement, si $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent respectivement vers a et b, alors (z_n) converge vers $\ell = a + ib$ puisque : $|z_n - \ell| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{Max}[|\mathrm{Re}(z_n) - a|, |\mathrm{Im}(z_n) - b|]$.

Tous les théorèmes sur les opérations sur les limites restent vrais si les suites sont convergentes, mais bien sûr les théorèmes liés à la relation d'ordre n'ont plus de sens (convergence monotone, théorème d'encadrement, suites adjacentes, …).