SOMMES ET PRODUITS

I – Généralités

1) Définitions

Définition : Une famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble non vide I est une application de I dans E dont les images sont notées : $i \mapsto x_i$. La famille est alors notée $(x_i)_{i\in I}$.

C'est par exemple le cas des suites lorsque $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$.

On suppose que E est un ensemble sur lequel on peut faire des additions (réels, complexes, vecteurs, fonctions, ..)

Notation : Soit I un ensemble non vide (en général une partie de $\mathbb{N}$).

$\sum\limits_{i\in I} x_i$ est la somme des x_i pour tous les indices $i \in I$ (si elle existe).

Si $I = [\![p, n]\!]$, on note : $\sum\limits_{i=p}^{n} x_i$ ou $\sum\limits_{p\le i\le n} x_i$ (somme de $n-p+1$ termes).

Exemple : Si $I = \{1,4,9\}$, alors : $\sum\limits_{i\in I} x_i = x_1 + x_4 + x_9$. Et $\sum\limits_{i=4}^{6} x_i = x_4 + x_5 + x_6$.

On peut remarquer que i est un indice muet : $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{j\in I} x_j = \sum\limits_{k\in I} x_k$ ….

On suppose que E est un ensemble sur lequel on peut faire des produits.

Notation : $\prod\limits_{i\in I} x_i$ est le produit des x_i pour tous les éléments $i \in I$ (s'il existe).

Si $I = [\![p, n]\!]$, on note : $\prod\limits_{i=p}^{n} x_i$ ou $\prod\limits_{p\le i\le n} x_i$ (somme de $n-p+1$ termes).

Les remarques sont les mêmes.

2) Propriétés

Propriétés liées aux opérations :

$$\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i \qquad \sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_j + \sum_{i\in I} y_i$$

$$\prod_{i\in I} \lambda x_i = \lambda^{\mathrm{Card}\, I} \prod_{i\in I} x_i \qquad \prod_{i\in I} x_i y_i = \prod_{i\in I} x_i \times \prod_{i\in I} y_i$$

MAIS on ne peut rien dire de $\sum\limits_{i\in I} x_i y_i$ et de $\prod\limits_{i\in I}(x_i + y_i)$.

Exemple : $1 + 3 + ... + (2n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum\limits_{k=0}^{n} k + \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$.

Propriétés liées aux indices :

$$\sum_{i\in I\cup J} x_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in J} x_i \text{ si } I \cap J = \varnothing \qquad \sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{i=p}^{q} x_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$\prod_{i\in I\cup J} x_i = \prod_{i\in I} x_i \times \prod_{i\in J} x_i \text{ si } I \cap J = \varnothing \qquad \prod_{i=p}^{n} x_i = \prod_{i=p}^{q} x_i \times \prod_{i=q+1}^{n} x_i \text{ (Relation de Chasles)}$$

Exemple : $11+13+15+17+19+21=\sum_{k=5}^{10}(2k+1)=\sum_{k=0}^{10}(2k+1)-\sum_{k=0}^{4}(2k+1)=11^2-5^2=96$.

Changements d'indice :

En posant $j=i+q$: $\sum_{i=p}^{n}x_i=\sum_{j=p+q}^{n+q}x_{j-q}$ $\quad\prod_{i=p}^{n}x_i=\prod_{j=p+q}^{n+q}x_{j-q}$

En posant $j=p+n-i$: $\sum_{i=p}^{n}x_i=\sum_{j=p}^{n}x_{p+n-j}$ $\quad\prod_{i=p}^{n}x_i=\prod_{j=p}^{n}x_{n+p-j}$

Plus généralement, si φ est une application bijective de I dans J, alors on peut effectuer le changement d'indice $j=\varphi(i)$:

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{j\in J}x_{\varphi^{-1}(j)} \qquad \prod_{i\in I}x_i=\prod_{j\in J}x_{\varphi^{-1}(j)}$$

Exemple : $\sum_{k=5}^{10}(2k+1)=\sum_{j=0}^{5}[2(j+5)+1]=\sum_{j=0}^{5}(2j+11)=2\sum_{j=0}^{5}j+\sum_{j=0}^{5}11=5\times6+6\times11=96$.

3) Cas particuliers à connaître

Le premier est le cas où la famille est constante :

Si $p\le n$: $\sum_{i=p}^{n}a=(n-p+1)a$ $\quad\prod_{i=p}^{n}a=a^{n-p+1}$

En effet la famille comprend $(n-p+1)$ termes.

Le deuxième est le cas des sommes ou des produits télescopiques.

Exemple : $\sum_{k=2}^{5}[(k+1)^2-k^2]=(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+(5^2-4^2)+(6^2-5^2)=6^2-2^2=32$.

Exemple : $\prod_{k=2}^{5}\frac{k}{k+1}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Une somme télescopique est une somme de la forme $\sum_{i=p}^{n}(x_{i+1}-x_i)$ ou $\sum_{i=p}^{n}(x_i-x_{i+1})$.

Elles sont opposées et : $\sum_{i=p}^{n}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=p}^{n}x_{i+1}-\sum_{i=p}^{n}x_i=\sum_{j=p+1}^{n+1}x_j-\sum_{j=p}^{n}x_j$.

On pose $j=i+1$ dans la première somme et $j=i$ dans la deuxième. Donc avec la relation de Chasles : $\boxed{\sum_{i=p}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_p}$

Une produit télescopique est un produit de la forme $\prod_{i=p}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i}$ ou $\prod_{i=p}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}}$.

Ils sont inverses, et on raisonne comme pour les sommes : $\boxed{\prod_{i=p}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i}=\frac{x_{n+1}}{x_p}}$

II – Exemples usuels

1) Produit usuel

Il y a un seul produit usuel : la factorielle d'un entier $\boxed{n!=\prod_{k=1}^{n}k}$ avec $\boxed{0!=1}$

La relation de Chasles donne la propriété principale : $\forall n\in\mathbb{N}\quad(n+1)!=(n+1)\times n!$

Conséquence : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{(n-k)!} \times \prod_{j=k+1}^{n} j = \dfrac{1}{k!} \times \prod_{j=n-k+1}^{n} j$

Exemple : $\binom{9}{7} = \dfrac{9\times 8}{2!} = 36$ et $\binom{9}{3} = \dfrac{9\times 8\times 7}{3!} = 84$.

2) Sommes usuelles

Sommes usuelles : $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = n+1$ si $x = 1$

Démonstration :

- $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j) = \sum_{j=1}^{n}(n+1) - \sum_{j=1}^{n} j = n(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k$. Donc $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1 = n(n^2+3n+3)$

  $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

  Donc $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{3}\left[n(n^2+3n+3) - 3\dfrac{n(n+1)}{2} - n\right] = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4 - k^4] = (n+1)^4 - 1 = n(n^3+4n^2+6n+4)$

  $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4 - k^4] = \sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

  $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^4 - k^4] = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$

  $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{1}{4}[n(n^3+4n^2+6n+4) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n] = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

- $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$ (somme télescopique)

  Les expressions s'en déduisent.

Binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

La démonstration se fait par récurrence sur n.

Conséquences : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n}$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0}$

3) Sommes déduites par dérivation

Si une somme a deux expressions, sa dérivée a aussi deux expressions.

Exemple 1 : Si $x \neq 1$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Donc : $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Et $f''(x)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)x^{k-2}=\dfrac{[-n(n+1)x^{n-1}+n(-1)x^{n}](1-x)^{2}+2(1-x)[1-(n+1)x^{n}+nx^{n+1}]}{(1-x)^{4}}$

Donc : $f''(x)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)x^{k-2}=\dfrac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^{2}-n-1)x^{n}+n(3-n)x^{n+1}}{(1-x)^{3}}$

Exemple 2 : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}=(1+x)^{n}$ d'après le binôme de Newton.

Donc : $f'(x)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}=n(n-1)(1+x)^{n-2}$

III – Sommes doubles

Lorsque l'on indexe sur une partie de $\mathbb{N}^2$, la famille indexée est notée $(x_{i,j})_{(i,j)\in I}$ ou $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ si on veut séparer les valeurs de i et de j.

Dans le cas d'une double sommation, les choses se compliquent car on peut commencer à sommer sur le premier indice ou sur le second. On ne donnera que quelques exemples usuels d'interversion des sommations.

$$\sum_{\substack{p\le i\le n\\ q\le j\le m}}x_{i,j}=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}x_{i,j}=\sum_{j=q}^{m}\sum_{i=p}^{n}x_{i,j}\quad\text{(sommation par colonnes ou par lignes)}$$

$$\sum_{p\le i\le j\le n}x_{i,j}=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=i}^{n}x_{i,j}=\sum_{j=p}^{n}\sum_{i=p}^{j}x_{i,j}\quad\text{(sommation au dessus de la diagonale)}$$

$$\sum_{p\le i<j\le n}x_{i,j}=\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_{i,j}=\sum_{j=p+1}^{n}\sum_{i=p}^{j-1}x_{i,j}\quad\text{(même chose avec la diagonale exclue)}$$

Exemple 1 : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{p}i+\sum_{j=1}^{p}j\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[pi+\dfrac{p(p+1)}{2}\right]$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j)=p\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{p(p+1)}{2}=p\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{p(p+1)}{2}=\frac{np(n+p+2)}{2}$$

Exemple 2 : 1ère méthode

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j)=\sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j-1}i+\sum_{i=1}^{j-1}j\right]=\sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2}+j(j-1)\right]$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\frac{3}{2}\sum_{j=2}^{n}j(j-1)=\frac{3}{2}\left[\sum_{j=2}^{n}j^{2}-\sum_{j=2}^{n}j\right]=\frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1-\frac{n(n+1)}{2}+1\right]$$

Donc : $\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{2}$.

Exemple 2 : 2ème méthode $\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sum_{j=i+1}^{n}i+\sum_{j=i+1}^{n}j\right]$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[i(n-i)+\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{i}j\right]=\sum_{i=1}^{n-1}\left[i(n-i)+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right]$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+\frac{2n-1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i^{2}$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=(n-1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n-1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

On retrouve : $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\frac{n(n+1)(n-1)}{2}$.