APPLICATIONS ET FONCTIONS

I – Applications

1) Relation binaire

Définition : Une relation binaire est un triplet formé d'un ensemble E de « départ », d'un ensemble F « d'arrivée » et d'une partie Γ non vide de $E \times F$ appelée « graphe » de la relation. Un élément x de E est en relation avec un élément y de F si $(x, y) \in \Gamma$.

La relation est donnée soit par le triplet (E, F, Γ), soit plus généralement par une caractérisation de cette appartenance.

Exemples : Avec $E = F = \mathbb{R}$: $x = y$ ou $x \leq y$ ou $x^2 + y^2 = 1$ ou $y = e^x$ ou $y = \ln x$.

2) Application

Définition : Une application f est une relation binaire (E, F, Γ) telle que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. On note $y = f(x)$ et y est appelé image de x par f, tandis que x est appelé antécédent de x.

Tout élément de E est en relation avec un et un seul élément de F, donc possède une image et une seule. Mais certains éléments de F peuvent avoir plusieurs antécédents ou aucun.

Exemples : Avec $E = F = \mathbb{R}$: $x \leq y$, $x^2 + y^2 = 1$ et $y = \ln x$ ne sont pas des applications. Par contre $x = y$ et $y = e^x$ le sont.

Notation : L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{A}(E, F)$ ou F^E.

Définition : On appelle identité d'un ensemble E l'application de E dans E, notée Id_E, définie par : $\forall x \in E \quad \mathrm{Id}_E(x) = x$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement Id.

3) Restriction et prolongement

Lorsque l'on change d'ensemble de départ ou d'arrivée, on change l'application, et donc ses propriétés.

Définition : Si f est une application de E dans F et si A est une partie non vide de E, on appelle restriction de f à A l'application notée $f_{/A}$ de A dans F qui coïncide avec f sur A, donc définie par : $\forall x \in A \quad f_{/A}(x) = f(x)$.
Inversement, si E est une partie d'un ensemble B et si g est une application de B dans F, on dira que g est un prolongement de f à B si $g_{/E} = f$.

La restriction de f à A est unique, alors que f peut admettre plusieurs prolongements à un même ensemble B.

Exemple : La fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ admet pour prolongements à $\mathbb{R}$ les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $g(x) = x$ et $h(x) = |x|$.

Ici, on a parlé de changement de l'ensemble de départ. Lorsque l'on change d'ensemble d'arrivée, on change l'application, mais il n'y a pas de terme particulier.

4) Composition

On peut composer des applications si les ensembles se correspondent.

Définition : Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G, la composée $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Exemple : Si f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=x^2+4$ et g de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x)=\ln x$, alors $g\circ f$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $(g\circ f)(x)=\ln(x^2+4)$, et $f\circ g$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par : $(f\circ g)(x)=(\ln x)^2+4$.

Les applications $f\circ g$ et $g\circ f$ ne sont pas toujours définies.

Théorème : La composition des applications est associative, mais non commutative.

Soit $x\in E$, $y=f(x)$, $z=g(y)$ et $t=h(z)$.

Donc $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(y)=z$ et $[h\circ(g\circ f)](x)=h[(g\circ f)(x)]=h(z)=t$.

Et $(h\circ g)(y)=h[g(y)]=h(z)=t$ donc $[(h\circ g)\circ f](x)=(h\circ g)[f(x)]=(h\circ g)(y)=t$.

Donc : $\forall x\in E \quad [h\circ(g\circ f)](x)=[(h\circ g)\circ f](x)$. Donc : $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

5) Image directe et image réciproque

Définition : Si f est une application de E dans F :

- si A est une partie de E, l'image directe de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A : $f(A)=\{f(x)/x\in A\}$. C'est aussi l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent dans A : $f(A)=\{y\in F/\exists x\in A \quad y=f(x)\}$.
- si B est une partie de F, l'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B : $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$.

Exemple : Pour $f(x)=x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $f(]-1,2[)=[0,4[$ et $f^{-1}([-1,4])=[-2,2]$.

Propriétés de l'image directe : Si A et B sont des parties de E :

- si $A\subset B$, alors $f(A)\subset f(B)$.
- $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. On a l'égalité si f est injective.

Propriétés de l'image réciproque : Si A et B sont des parties de F :

- si $A\subset B$, alors $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

Démonstration : Les propriétés 1 et 4 sont évidentes.

- $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$. Donc $f(A)\subset f(A\cup B)$ et $f(B)\subset f(A\cup B)$. Donc on a l'inclusion $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

  Inversement, si $y\in f(A\cup B)$, il existe $x\in A\cup B$ tel que $y=f(x)$. Si $x\in A$, alors $y\in f(A)$ et si $x\in B$, alors $y\in f(B)$. Dans les deux cas $y\in f(A)\cup f(B)$. Donc on a l'inclusion $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.
- $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$. Donc $f(A\cap B)\subset f(A)$ et $f(A\cap B)\subset f(B)$. Donc on a l'inclusion $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

  Inversement, si $y\in f(A)\cap f(B)$, alors $y\in f(A)$ et $y\in f(B)$, donc il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $y=f(a)=f(b)$. Mais dans le cas général, a et b peuvent être distincts. Par contre on verra que, si f est injective, alors $a=b$, donc appartient à $A\cap B$. Donc on n'a la deuxième inclusion que si f est injective.
- $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$. Donc $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(A\cup B)$ et $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$. Donc on a l'inclusion $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$.

  Inversement, si $x\in f^{-1}(A\cup B)$, alors $f(x)\in A\cup B$. Si $f(x)\in A$, alors $x\in f^{-1}(A)$ et si $f(x)\in B$, alors $x\in f^{-1}(B)$. Dans les deux cas $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$. Donc on a l'inclusion $f^{-1}(A\cup B)\subset f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. Donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B)$. Donc on a l'inclusion $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
  Inversement, si $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, donc $f(x) \in A \cap B$, donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$. On a donc l'inclusion $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.

6) <u>Fonction indicatrice d'une partie</u>

<u>Définition</u> : Si *A* est une partie de *E*, on appelle fonction indicatrice (ou caractéristique) de *A* l'application de *E* dans $\{0,1\}$ notée 1_A et définie par :

$$\forall x \in E \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Cette fonction sera utilisée en probabilités.

<u>Propriétés</u> : Si *A* et B sont deux parties de *E* :

$$A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B \qquad 1_{\overline{A}} = 1 - 1_A \qquad 1_{A\cap B} = 1_A 1_B \qquad 1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$$

Les démonstrations sont évidentes sauf la dernière, pour laquelle on utilise le complémentaire : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ donc $1_{\overline{A\cup B}} = 1_{\overline{A}\cap\overline{B}}$. Donc $1 - 1_{A\cup B} = (1-1_A)(1-1_B)$.

7) <u>Equations</u>

L'objectif est la résolution d'une équation, ce qui revient à la recherche d'antécédents.

<u>*Exemple*</u> : Résoudre l'équation $x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$ revient à chercher les antécédents de 0 par la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$.

Bien sûr, cela dépend de l'ensemble de départ et d'arrivée de *f*.

Par exemple (–1) n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction définie par $f(x) = x^2$, alors qu'il en a dans $\mathbb{C}$.

<u>Définition</u> : Une application *f* de *E* dans *F* est :

- <u>Injective</u> si tout élément de *F* possède au plus un antécédent dans *E*.
- <u>Surjective</u> si tout élément de *F* possède au moins un antécédent dans *E*.
- <u>Bijective</u> si tout élément de *F* possède un unique antécédent dans *E*. Alors, l'application de *F* dans *E* qui à tout élément de *F* associe cet unique antécédent s'appelle l'application réciproque de *f* et se note f^{-1}.

Pour étudier les propriétés d'une application *f*, il faut donc pour tout $y \in F$ chercher le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans *E*.

La fonction *f* sera injective s'il y a 0 ou 1 solution, surjective s'il y a au moins une solution et bijective s'il y a une unique solution.

<u>*Exemples*</u> : Avec $E = F = \mathbb{R}$: $x = y$ est une application bijective, tandis que $y = e^x$ est une application injective (unique antécédent $x = \ln y$ si $y > 0$), mais pas surjective (pas d'antécédent si $y \leq 0$).

<u>Théorème</u> : Une application de *E* dans *F* est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Mais il est souvent plus court d'étudier directement l'équation $f(x) = y$.

Montrer qu'une application est injective revient à montrer que deux éléments distincts de *E* ne peuvent pas avoir la même image : si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Par contraposée, on obtient :

<u>Théorème</u> : Une application *f* de *E* dans *F* est injective si et seulement si, pour tous les éléments x_1 et x_2 de *E* : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

<u>*Exemple*</u> : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ de $E=\mathbb{R}-\{1\}$ dans $F=\mathbb{R}$. Soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}-\{1\}$.

$f(x_1)=f(x_2)$ ssi $\dfrac{2x_1+1}{x_1-1}=\dfrac{2x_2+1}{x_2-1}$, donc ssi $(2x_1+1)(x_2-1)=(x_1-1)(2x_2+1)$, donc en développant, ssi $2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_1x_2-2x_2+x_1-1$, donc ssi $x_1=x_2$.
Donc l'application *f* est injective.
Soit $y\in\mathbb{R}$. Alors : $y=f(x)$ équivaut à $y(x-1)=2x+1$, donc à $x(y-2)=y+1$.
Si $y=2$, l'équation n'a pas de solution. Donc 2 n'a pas d'antécédent.
Donc l'application *f* n'est pas surjective de *E* dans $F=\mathbb{R}$.

Par contre, si l'on prend $F=\mathbb{R}-\{2\}$: $y=f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{y-2}$.

Or $\forall y\in\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad \dfrac{y+1}{y-2}\in\mathbb{R}-\{1\}$ car : $\dfrac{y+1}{y-2}=1\Leftrightarrow y+1=y-2$ (donc pas de solution)

Donc : $\forall y\in\mathbb{R}-\{2\}\quad \exists! x\in\mathbb{R}-\{1\}\quad y=f(x)$. Donc *f* est bijective de $E=\mathbb{R}-\{1\}$ dans $F=\mathbb{R}-\{2\}$ et son application réciproque est définie par : $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$.

<u>Remarque</u> : La notation f^{-1} est utilisée dans l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie, mais si *f* n'est pas bijective, il n'y a pas d'application f^{-1}.

<u>Théorème</u> : La composée de deux applications injectives est injective.
La composée de deux applications surjectives est surjective.
La composée de deux applications bijectives est bijective.

<u>Démonstration</u> : La troisième est évidemment conséquence des deux autres.

- Supposons *f* injective de *E* dans *F* et *g* injective de *F* dans *G*. Soient $(x_1,x_2)\in E^2$.
  Si $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$, alors $g[f(x_1)]=g[f(x_2)]$, donc $f(x_1)=f(x_2)$ car *g* est injective, donc $x_1=x_2$ car *f* est injective. Donc $g\circ f$ est injective.
- Supposons *f* surjective de *E* dans *F* et *g* surjective de *F* dans *G*. Pour tout $z\in G$, il existe $y\in F$ tel que $z=g(y)$ car *g* est surjective, et il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ car *f* est surjective. Donc *z* possède au moins un antécédent *x* par $g\circ f$ car $z=g(y)=g[f(x)]=(g\circ f)(x)$. Donc $g\circ f$ est surjective.

<u>Théorème</u> : Si *f* est bijective de *E* dans *F*, alors $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$.

C'est évident, étant données les définitions.

<u>Théorème</u> : Si *f* est une application de *E* dans *F* et s'il existe deux applications *g* et *h* de *F* dans *E* telles que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ h=\mathrm{Id}_F$, alors *f* est bijective et $g=h=f^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que *f* est bijective.
Soient x_1 et x_2 de *E* tels que $f(x_1)=f(x_2)$. Donc $g[f(x_1)]=g[f(x_2)]$. Donc $x_1=x_2$. Donc *f* est injective.
Soit $y\in F$. Donc $f[h(y)]=y$. Donc il existe $x=h(y)$ dans *E* tel que $y=f(x)$. Donc *f* est surjective de *E* dans *F*.
Donc *f* est bijective. Soit f^{-1} sa réciproque. Donc : $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$.
Donc $g=g\circ(f\circ f^{-1})=(g\circ f)\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_E\circ f^{-1}=f^{-1}$.
Et $h=(f^{-1}\circ f)\circ h=f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ\mathrm{Id}_F=f^{-1}$.

II – Fonctions

1) Ensemble de définition

<u>Définition</u> : Une fonction *f* de *E* dans *F* est une relation binaire (E, F, Γ) telle que pour tout $x \in E$, il existe <u>au plus</u> un élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Donc tout élément de *E* est en relation soit avec un unique élément de *F*, soit avec aucun. Donc toute application est une fonction, mais la réciproque est fausse.

<u>*Exemple*</u> : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais pas une application.

On parle de fonction numérique d'une variable réelle si $E = F = \mathbb{R}$. Mais par la suite, on étudiera les fonctions numériques de plusieurs variables réelles.

<u>Définition</u> : Si *f* est une fonction de *E* dans *F*, on appelle ensemble de définition de *f* l'ensemble D_f des éléments *x* de *E* qui possèdent une image dans *F*.

<u>*Exemple*</u> : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$.

$\dfrac{u}{v}$ est défini si et seulement si *u* et *v* sont définis, et si $v \neq 0$.

$\sqrt{u}$ est défini si et seulement si *u* est défini, et si $u \geq 0$.

$\ln u$ est défini si et seulement si *u* est défini, et si $u > 0$.

$\tan u$ est défini si et seulement si *u* est défini, et si $u \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.

$\operatorname{cotan} u$ est défini si et seulement si *u* est défini, et si $u \not\equiv 0 \quad (\pi)$.

Cela donne un système de conditions qu'il s'agit de résoudre.

<u>*Exemple 1*</u> : $f(x) = \dfrac{x}{1-\sqrt{x+2}}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 1-\sqrt{x+2} \neq 0 \end{cases}$.

Donc $D_f = [-2,-1[\cup]-1,+\infty[$.

<u>*Exemple 2*</u> : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$. Donc $D_f =]0,1[$.

<u>*Exemple 3*</u> : $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi) \\ \tan x \neq 1 \end{cases}$.

Donc $D_f = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right[\right)$.

2) Parité

Dans certains cas, en remarquant des propriétés de la fonction, on peut réduire l'étude.

<u>Définition</u> : Une fonction *f* est impaire si $\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport au point *O* et on peut réduire l'étude de la fonction *f* à $D_f \cap [0,+\infty[$.

La première condition revient à dire que D_f est symétrique par rapport à 0.

Les fonctions sinus, tangente et cotangente sont impaires.

<u>*Autre Exemple*</u> : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. Donc $x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \neq 0$ et $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.

Donc $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ est symétrique par rapport à 0.

$\forall x \in D_f \quad f(-x) = \ln\left(\dfrac{-x-1}{-x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = -\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$.

Donc la fonction *f* est impaire. On réduit son étude à $]1,+\infty[$ et on complète sa courbe par symétrie par rapport au point *O*.

<u>Plus généralement</u>, la courbe représentative d'une fonction f admet un centre de symétrie $\Omega(a,b)$ si et seulement si : $\forall x \in D_f \quad 2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$.

La première condition signifie que D_f est symétrique par rapport à *a*.

<u>Exemple</u> : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. La courbe est symétrique par rapport à $\Omega(1,2)$.

<u>Définition</u> : Une fonction *f* est paire si $\forall x \in D_f \quad (-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées *Oy* et on peut réduire l'étude de la fonction *f* à $D_f \cap [0,+\infty[$.

La première condition revient toujours à dire que D_f est symétrique par rapport à 0.

La fonction cosinus est paire.

<u>Autre Exemple</u> : $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

$\forall x \in D_f \quad f(-x) = \dfrac{e^{-2x}+1}{e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}(e^{-2x}+1)}{e^{2x}e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} = f(x)$.

Donc la fonction *f* est paire. On réduit son étude à $[0,+\infty[$ et on complète sa courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Attention ! Impaire n'est pas le contraire de paire : la plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires. Une seule fonction est à la fois paire et impaire : la fonction nulle.

<u>Plus généralement</u>, la courbe représentative d'une fonction *f* admet un axe de symétrie d'équation $x = a$ si et seulement si : $\forall x \in D_f \quad 2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.

La première condition signifie que D_f est symétrique par rapport à *a*.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^2 - 4x + 1$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$.

3) <u>Périodicité</u>

<u>Définition</u> : Une fonction f est périodique s'il existe un réel $P > 0$ tel que : $\forall x \in D_f \quad x + P \in D_f$ et $f(x+P) = f(x)$.

La période est le plus petit réel $P > 0$ qui convient.

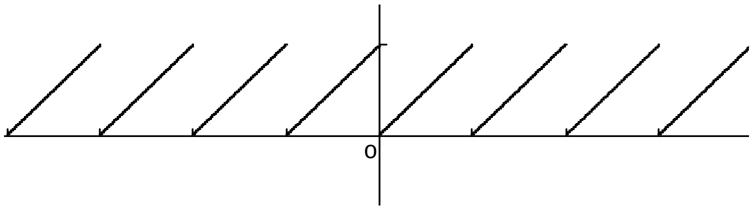
Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteurs $nP\vec{i}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. et on peut réduire l'étude de la fonction *f* à $D_f \cap [a, a+P]$ où *a* est un réel quelconque.

Par récurrence, on démontre que : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in D_f \quad f(x+nP) = f(x)$.

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
Les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π.

Autre Exemple : $f(x) = x - \text{Ent}(x)$ a pour période 1.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Ent}(x+1) = \text{Ent}(x) + 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x)$.



4) **Sens de variations**

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est croissante sur I si pour tous a et b de I : $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

f est décroissante sur I si pour tous a et b de I : $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.

f est monotone sur I si elle est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

f est strictement croissante sur I si pour tous a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

f est strictement décroissante sur I si pour tous a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

f est strictement monotone sur I si elle est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

Une fonction croissante sur I est une fonction qui conserve le sens des inégalités, alors qu'une fonction décroissante est une fonction qui change le sens des inégalités.

Propriétés :

- La somme de deux fonctions monotones de même sens de variations est une fonction monotone de même sens.
- Pour le produit ou le quotient de deux fonctions monotones, on ne peut rien dire.
- Le produit d'une fonction monotone par un réel positif est une fonction monotone de même sens. Le produit d'une fonction monotone par un réel négatif est une fonction monotone de sens contraire.
- L'inverse d'une fonction monotone positive est une fonction monotone de sens contraire.
- La composée de deux fonctions monotones de même sens est croissante. La composée de deux fonctions monotones de sens contraires est décroissante.

Démonstrations : A faire en exercice.

5) **Extremum local d'une fonction**

Définition : Une fonction définie sur un intervalle I admet en $a \in I$:

- un maximum local s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \quad f(x) \leq f(a)$.
- un minimum local s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \quad f(x) \geq f(a)$.
- un extremum local si f admet en a un minimum local ou maximum local.
- un maximum absolu si $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$.
- un minimum absolu si $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$.
- un extremum absolu si f admet en a un minimum absolu ou maximum absolu.

Ces extremums peuvent être atteints soit aux bornes de l'intervalle, soit à l'intérieur de l'intervalle.