ENSEMBLES

I – Généralités

1) Ensembles et propriétés

Une proposition (propriété) mathématique est un énoncé qui peut être vrai ou faux.
Exemple : « 5 est plus grand que 1 » est vraie, mais « 3 est plus petit que 1 » est faux.
Lorsque cette proposition P comporte une ou plusieurs lettres (variables), elle peut être vraie pour certaines valeurs de la variable et fausse pour d'autres. On lui associe l'ensemble des valeurs de la variable pour lesquelles la proposition est vraie : $S_P = \{x \in E \,/\, P(x) \text{ est vraie}\}$.

Exemple : « x est plus grand que 1 » est vraie si $x \in]1,+\infty[$ et faux sinon : $S_P =]1,+\infty[$.
On note $\varnothing$ l'ensemble vide (qui n'a aucun élément).

Si $S_P = E$, on écrira : « $\forall x \in E \quad P(x)$ » (quantificateur universel)
Si $S_P \neq \varnothing$, on écrira : « $\exists x \in E \quad P(x)$ » (quantificateur existentiel)

Exemple : « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ » et « $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 = -1$ ».
On établit ainsi une correspondance entre les propriétés et les ensembles. Les ensembles sont définis :
- soit en extension : par la liste de leurs éléments.
- soit en compréhension : par une propriété caractéristique de leurs éléments.

Si E est l'ensemble, on notera P_E la propriété correspondante.

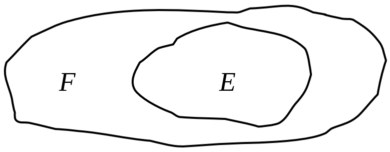
Exemple : Résoudre l'équation $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$, c'est déterminer l'ensemble S des réels x qui vérifient l'égalité. L'ensemble S est donc défini en compréhension : $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0\right\}$. On a fini de résoudre l'équation lorsque l'on a déterminé les éléments de S : $S = \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, 1\right\}$. On a exprimé S en extension.

Symbolisme des ensembles	Langage des ensembles	Langage des propriétés	Symbolisme des propriétés
$a \in E$	a appartient à E. a est élément de E.	a vérifie P_E. P_E est vraie pour a.	
$a \notin E$	a n'appartient pas à E. a n'est pas élément de E.	a ne vérifie pas P_E. P_E est fausse pour a.	
$E \subset F$	E est inclus dans F. E est une partie de F. Tout élément de E est élément de F.	Si P_E est vraie, alors P_F est vraie. Pour que P_F soit vraie, il suffit que P_E soit vraie.	$P_E \Rightarrow P_F$
$E = F$	E est égal à F. E et F ont les mêmes éléments. Revient à démontrer : $E \subset F$ et $F \subset E$	P_E est vraie si et seulement si P_F est vraie. Revient à démontrer : $P_E \Rightarrow P_F$ et $P_F \Rightarrow P_E$	$P_E \Leftrightarrow P_F$

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E. Cet ensemble $\mathscr{P}(E)$ contient toujours E et $\varnothing$.

Exemple : Si $E=\{1,2\}$, alors les parties de E sont des ensembles dont les éléments sont 1 ou 2 (ou tous les deux, ou ni l'un ni l'autre) : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$ et $\varnothing$.
Donc $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de ces quatre ensembles : $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

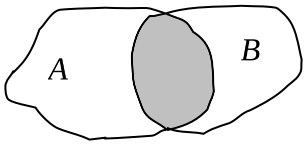
Pour raisonner sur les ensembles (ou sur les propriétés), on les schématise souvent par des diagrammes.
Par exemple $E\subset F$ sera schématisé par :



2) Intersection et réunion

<u>Définition</u> : Soient A et B sont deux parties d'un même ensemble E.
On appelle intersection de A et B la partie $A\cap B=\{x\in E\ /\ x\in A \text{ et } x\in B\}$. C'est l'ensemble des éléments x de E qui vérifient simultanément les propriétés P_A et P_B.

C'est l'ensemble des éléments communs à A et B.
Le schéma correspondant est :



<u>Propriétés</u> : Pour toutes parties A, B et C de E :

$A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$. Donc : $A\cap\varnothing=\varnothing$.

Si $A\subset B$, alors $A\cap B=A$. Donc : $A\cap E=A$.

$A\cap B=B\cap A$ (commutativité).

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (associativité).

Leur démonstration est triviale sauf la dernière. On raisonne par double inclusion.
<u>Première méthode</u> : $F\subset G$ si et seulement si $\forall x\in F\quad x\in G$.

- Soit $x\in A\cap(B\cap C)$. Donc $x\in A$ et $x\in B\cap C$. Donc $x\in A$ et $x\in B$ et $x\in C$.
  Donc $x\in A\cap B$ et $x\in C$. Donc $x\in(A\cap B)\cap C$.
  Donc $A\cap(B\cap C)\subset(A\cap B)\cap C$.
- Soit $x\in(A\cap B)\cap C$. Donc $x\in A\cap B$ et $x\in C$. Donc $x\in A$ et $x\in B$ et $x\in C$.
  Donc $x\in A$ et $x\in B\cap C$. Donc $x\in A\cap(B\cap C)$.
  Donc $(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$.

Donc : $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

<u>Deuxième méthode</u> : $F\subset G\cap H$ si et seulement si $F\subset G$ et $F\subset H$.

- $\left.\begin{array}{l} B\cap C\subset B \text{ donc } A\cap(B\cap C)\subset A\cap B.\\ A\cap(B\cap C)\subset B\cap C\subset C.\end{array}\right\}$ Donc $A\cap(B\cap C)\subset(A\cap B)\cap C$.
- $\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset B \text{ donc } (A\cap B)\cap C\subset B\cap C.\\ (A\cap B)\cap C\subset A\cap B\subset A.\end{array}\right\}$ Donc $(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$.

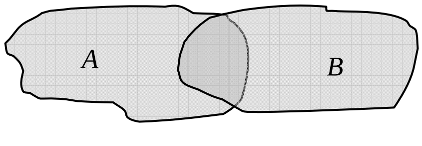
Donc : $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

Si $A\cap B=\varnothing$, on dit que les parties A et B sont disjointes.

Les propriétés P_A et P_B ne sont pas être vraies simultanément : elles sont incompatibles.

<u>Définition</u> : Soient A et B sont deux parties d'un même ensemble E.
On appelle réunion de A et B la partie $A\cup B=\{x\in E\ /\ x\in A \text{ ou } x\in B\}$. C'est l'ensemble des éléments x de E qui vérifient au moins l'une des propriétés P_A ou P_B.

On peut remarquer que le « ou » n'est pas exclusif.
Le schéma correspondant est :



<u>Propriétés</u> : Pour toutes parties *A*, *B* et *C* de *E* :

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$. Donc : $A \cap B \subset A \cup B$ et $A \cup E = E$.

Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$. Donc : $A \cup \varnothing = A$.

$A \cup B = B \cup A$ (commutativité).

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)

Leur démonstration est triviale sauf la dernière. Les deux méthodes précédentes peuvent être utilisées. Ici : $G \cup H \subset F$ si et seulement si $G \subset F$ et $H \subset F$.

- $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \subset (A \cup B) \cup C. \\ B \subset A \cup B \text{ donc } B \cup C \subset (A \cup B) \cup C. \end{array}\right\}$ Donc $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.
- $\left.\begin{array}{l} C \subset B \cup C \subset A \cup (B \cup C). \\ B \subset B \cup C \text{ donc } A \cup B \subset A \cup (B \cup C). \end{array}\right\}$ Donc $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.

Donc : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

<u>Propriétés</u> : Pour toutes parties *A*, *B* et *C* de *E* :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

<u>Démonstration</u> : On raisonne toujours par double inclusion. Mais ici la deuxième méthode ne fonctionne pas dans les deux sens.

- Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Or $x \in B \cup C$ si et seulement si $x \in B$ ou $x \in C$. Donc il y a deux cas : soit $x \in B$, donc $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$ soit $x \in C$, donc $x \in A$ et $x \in C$, donc $x \in A \cap C$. Donc $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

  Donc $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$. Donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A$.

  $A \cap B \subset B \subset B \cup C$ et $A \cap C \subset C \subset B \cup C$. Donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset B \cup C$.

  Donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Donc : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

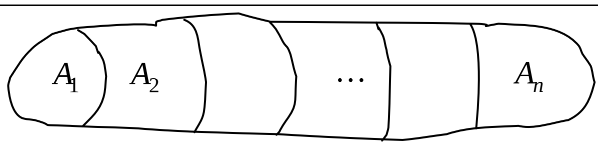
On peut généraliser ces notations à l'intersection ou à la réunion d'un nombre quelconque *n* de parties que l'on numérote à l'aide de l'ensemble $I = [\![1, n]\!]$:

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k \in I} A_k \qquad\qquad A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k \in I} A_k$$

On verra plus tard que l'on peut même généraliser à une infinité de parties.

<u>Définition</u> : Des parties non vides $A_1, \ldots, A_n$ d'un même ensemble *E* forment une partition de *E* si elles sont deux à deux disjointes ($A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous $i \neq j$) et si leur réunion est égale à *E*.

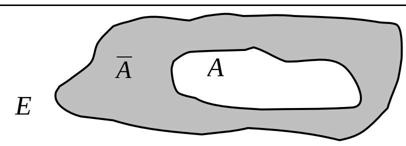
Le schéma correspondant est :



3) <u>Complémentaire d'une partie</u>

<u>Définition</u> : Si *A* est une partie d'un ensemble *E*, on appelle complémentaire de *A* dans *E* la partie : $\complement_E(A) = \overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$. C'est l'ensemble des éléments *x* de *E* qui ne vérifient pas P_A. La propriété caractéristique $P_{\overline{A}}$ est donc la négation de P_A.

Le schéma correspondant est :



<u>Propriétés</u> : Pour toutes parties A et B de E :

$\overline{E} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = E$

$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad A \cup \overline{A} = E$

$A \subset B$ est équivalent à $\overline{B} \subset \overline{A}$.

<u>Lois de Morgan</u> : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Les premières sont évidentes. Montrons les trois dernières :

- Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in \overline{B}$. Donc $x \notin B$. Or $A \subset B$. Donc $x \notin A$. Donc $x \in \overline{A}$. Donc $\overline{B} \subset \overline{A}$. La réciproque se démontre en appliquant ceci à $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

  <u>Conséquence</u> : Démontrer $P_A \Rightarrow P_B$ est équivalent à démontrer $P_{\overline{B}} \Rightarrow P_{\overline{A}}$ (raisonnement par contraposée).

- $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \text{ donc } \overline{A} \subset \overline{A \cap B} \\ A \cap B \subset B \text{ donc } \overline{B} \subset \overline{A \cap B} \end{array}\right\}$ Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

- $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \text{ donc } \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \\ B \subset A \cup B \text{ donc } \overline{A \cup B} \subset \overline{B} \end{array}\right\}$ Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

- On applique les deux propriétés démontrées précédemment à $\overline{A}$ et $\overline{B}$. On obtient : $A \cup B \subset \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ et $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset A \cap B$, puisque $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}} = B$. Donc en prenant les complémentaires : $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

On dit de manière abrégée que la négation de « et » est « ou » et inversement.

On a vu que « $\forall x \in E \quad P(x)$ » signifie $S_P = E$, donc $S_{\overline{P}} = \varnothing$. Donc la négation de cette phrase correspond à $S_{\overline{P}} \neq \varnothing$, donc à « $\exists x \in E \quad \overline{P}(x)$ ».

De même la négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad \overline{P}(x)$ ».

<u>*Exemple*</u> : La négation de « Tous les chats sont gris » est « Il existe un chat qui n'est pas gris ». La négation de « Vous êtes admissible à un concours » est « Vous êtes refusé à tous les concours ».

Quelle que soit la partie A de E, A et $\overline{A}$ forment une partition de E.

Démontrer que $B = \overline{A}$ équivaut à démontrer que $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.

4) <u>Autres opérations</u>

<u>Définition</u> : Si A et B sont deux parties de E, on définit :

- la différence : $A - B = A \cap \overline{B}$ ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et pas à B.
- la différence symétrique $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B, le « ou » étant exclusif.

Une autre expression est : $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Des propriétés de ces opérations seront vues en exercice.

5) <u>Produit cartésien</u>

<u>Définition</u> : Si E et F sont deux ensembles, on appelle produit cartésien de E par F l'ensemble : $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$. Lorsque $F = E$, on note $E \times E = E^2$.

On généralise ces notations à n ensembles :

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \prod_{k=1}^{n} E_k = \{(x_1, \ldots, x_n) / \forall k \in [\![1, n]\!] \quad x_k \in E_k\}$$

Et on note E^n si tous ces ensembles sont égaux à E.

II – Ensemble des entiers naturels

1) Propriétés

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est muni :

- d'une addition commutative et associative qui possède un élément neutre 0. Mais l'équation $a+x=b$ n'a pas toujours une solution dans $\mathbb{N}$.
- d'une multiplication commutative et associative qui possède un élément neutre 1, qui est distributive par rapport à l'addition. Mais l'équation $ax=b$ n'a pas toujours une solution dans $\mathbb{N}$.
- d'une relation d'ordre total : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément et toute partie non vide majorée possède un plus grand élément.

2) Récurrence

<u>Théorème</u> : Toute partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et qui contient le successeur de chacun de ses éléments est égale à $\mathbb{N}$.

En effet, soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in A$ et $\forall n \in A \quad (n+1) \in A$.

On raisonne par l'absurde en supposant que $A \neq \mathbb{N}$. Donc $\overline{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc qui possède un plus petit élément a. Or $a \neq 0$ puisque $0 \in A$. Donc $a-1$ est un élément de $\mathbb{N}$ qui n'appartient pas à $\overline{A}$ puisqu'il est plus petit que a. Donc $a-1 \in A$, et donc d'après la deuxième hypothèse $(a-1)+1 \in A$, donc $a \in A$, ce qui est impossible puisque $a \in \overline{A}$. Donc la supposition était fausse et $A = \mathbb{N}$.

Lorsque l'on a une propriété $\mathscr{P}(n)$, définie sur $\mathbb{N}$, à démontrer pour tout entier naturel, on peut lui associer l'ensemble A des entiers naturels n tels que $\mathsf{P}(n)$ soit vraie. On définit ainsi une partie A de $\mathbb{N}$ et on veut montrer que $A = \mathbb{N}$. Il suffit donc de démontrer deux propriétés précédentes :

- $0 \in A$, c'est-à-dire $\mathscr{P}(0)$ est vraie. C'est la phase d'initialisation.
- $\forall n \in A \quad (n+1) \in A$, c'est-à-dire chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. C'est la phase d'hérédité.

On aura ainsi démontré que $A = \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n. C'est le principe des « dominos cascades » : on pousse le premier (initialisation) et chaque domino fait tomber le suivant (hérédité).

Plus généralement, il se peut que l'on ne puisse pas commencer à 0, mais seulement à partir d'un entier p. La partie A associée est alors l'ensemble des entiers naturels n tels que $\mathscr{P}(p+n)$ soit vraie. En montrant que $A = \mathbb{N}$, on montre que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

<u>Théorème</u> : Si une propriété $\mathscr{P}(n)$ est définie pour tout entier $n \geq p$ et si elle vérifie les deux hypothèses suivantes :

- Initialisation : $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
- Hérédité : chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq p$, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Alors $\mathsf{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

<u>*Exemple 1*</u> : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ 3^n \geq 2n+1$.

Ici, la récurrence commence à $p=0$ et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est : $3^n \geq 2n+1$.

<u>Initialisation.</u> Pour $n=0$:

$3^n = 3^0 = 1$ et $2n+1 = 2\times 0+1 = 1$. Donc $3^0 \geq 2\times 0+1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>.

Il s'agit de montrer que chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On suppose donc que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour <u>un</u> entier n, c'est-à-dire que $3^n \geq 2n+1$.

La supposition $3^n \geq 2n+1$ est appelée « hypothèse de récurrence ».
On sait que $3^{n+1} = 3\times 3^n$. Donc en multipliant par 3 : $3^{n+1} \geq 6n+3$.
Or $6 \geq 2$ et $n \geq 0$, donc $6n \geq 2n$, donc $3^{n+1} \geq 6n+3 \geq 2n+3$, donc $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$.
Donc chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Donc pour tout entier $n \geq 0$, on a : $3^n \geq 2n+1$.
Exemple 2 : Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la somme : $S_n = 1+2+...+n$ que l'on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ici, la récurrence commence à $p=1$ et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation.
Pour $n=1$: $S_n = S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité.
Il s'agit de montrer que chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On suppose donc que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier *n*, c'est-à-dire que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Et on montre alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Par hypothèse de récurrence : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Et on sait que $S_{n+1} = S_n + (n+1)$.
Donc $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Donc chaque fois que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion
On a vérifié les deux hypothèses du théorème. Donc on peut conclure : la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3) Autres Récurrences

Le principe d'une récurrence est d'utiliser à chaque fois un rang pour démontrer le suivant. Mais parfois, un rang ne suffit pas, on en a besoin de plusieurs. On applique alors le théorème à une autre propriété $\mathscr{Q}(n)$.
Exemple : Soit la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n(1-3n)$.
Pour l'hérédité, pour calculer u_{n+1}, on aura besoin de l'expression des deux termes précédents. Donc on fait une « récurrence double ».
La propriété $\mathscr{Q}(n)$ est formée de $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$: $\begin{cases} u_n = (-1)^n(1-3n) \\ u_{n+1} = (-1)^{n+1}[1-3(n+1)] \end{cases}$.

- Initialisation : $\mathscr{Q}(0)$ est vraie car $\begin{cases} (-1)^0(1-3\times 0) = 1 = u_0 \\ (-1)^1(1-3\times 1) = 2 = u_1 \end{cases}$
- Hérédité : On suppose que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, donc que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. On démontre que $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie, donc que $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vraies. Pour $\mathscr{P}(n+1)$, c'est dans l'hypothèse de récurrence. Il reste $\mathscr{P}(n+2)$.

On suppose donc $u_n = (-1)^n(1-3n)$ et $u_{n+1} = (-1)^{n+1}[1-3(n+1)] = (-1)^n(3n+2)$.

$u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n = -2(-1)^n(3n+2) - (-1)^n(1-3n) = (-1)^n(-5-3n)$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n$. Donc : $u_{n+2} = (-1)^{n+2}[1-3(n+2)]$. Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout *n*, donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout *n*.

Dans d'autres cas, il faut supposer plus.

Théorème (Récurrence forte) : Si une propriété $\mathscr{P}(n)$ est définie pour tout entier $n \geq p$ et si elle vérifie les deux hypothèses suivantes :

- Initialisation : $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
- Hérédité : chaque fois que, pour un entier $n \geq p$, la propriété est vraie jusqu'à *n*, donc $\mathscr{P}(p)$, $\mathscr{P}(p+1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Alors $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Ce théorème est issu directement du précédent que l'on applique à la nouvelle propriété $\mathscr{Q}(n)$: « pour tout $k \leq n$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie ».

Exemple : On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1}$.

- Initialisation : $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = 2^0$.
- Hérédité : On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u_k = 2^{k-1}$ pour un entier $n \geq 1$.

  Donc $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 1 + \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n$.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 2^{n-1}$.

Remarque : La récurrence double ne rentre pas dans ce cas car l'hérédité nécessite effectivement deux termes, donc ne pourrait commencer qu'à 1. Il faudrait donc initialiser en démontrant $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$.

III – Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$. Ses propriétés prolongent celles de $\mathbb{N}$. Il est muni :

- d'une addition commutative et associative, qui possède un élément neutre 0. Mais de plus tout élément *a* possède un symétrique $(-a)$, donc l'équation $a + x = b$ a toujours une unique solution dans $\mathbb{Z}$.
- d'une multiplication commutative et associative qui possède un élément neutre 1, distributive par rapport à l'addition. Mais l'équation $ax = b$ n'a pas toujours une solution dans $\mathbb{Z}$.
- d'une relation d'ordre total : toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément et toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

On peut décrire $\mathbb{Z}$ sous la forme : $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Donc, démontrer une propriété sur $\mathbb{Z}$ revient à la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tous les entiers $(-n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

IV – Ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. Ses propriétés prolongent celles de $\mathbb{Z}$. Il est muni :

- d'une addition qui a les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{Z}$.

- d'une multiplication commutative et associative qui possède un élément neutre 1, distributive par rapport à l'addition. Mais de plus tout élément non nul a un inverse dans $\mathbb{Q}$, donc l'équation $ax = b$ a une unique solution dans $\mathbb{Q}$ si $a \neq 0$.
- d'une relation d'ordre total. Mais on perd une partie des propriétés.

Un premier problème est la non unicité de l'écriture : tout rationnel s'écrit sous la forme $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbf{N}^*$, mais p et q ne sont pas uniques. Par contre, il existe une unique forme irréductible (p et q n'ont pas de diviseur commun).

Un second problème est qu'il existe des parties non vides majorées qui n'ont pas de plus grand élément. Par exemple $A = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\}$ est non vide (car $1 \in A$) et majorée par 2. On raisonne par l'absurde. Supposons que A possède un plus grand élément a, qui vérifie $a^2 < 2$. Montrons qu'il existe un élément $b = a + \dfrac{1}{n}$ (donc plus grand que a) qui appartient à A. L'entier n doit vérifier $\dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - a^2$. Or $n \geq 1$, donc $n^2 \geq n$, donc $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n}$. Il suffit donc que $\dfrac{2a+1}{n} < 2 - a^2$, donc $n > \dfrac{2a+1}{2-a^2}$. Donc si A a un plus grand élément a, il vérifie $a^2 = 2$, donc il existe deux entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$ et tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible. Donc p est pair : $p = 2p'$. Donc $q^2 = 2(p')^2$. Donc q est pair ce qui est impossible (fraction irréductible).

Cependant, une remarque importante est qu'entre deux rationnels x et y, il existe toujours un autre rationnel $\dfrac{x+y}{2}$.

Parmi les rationnels, il y a les décimaux : x est décimal si $\exists n \in \mathbf{N} \quad 10^n x \in \mathbb{Z}$.

V – Ensemble des nombres réels

1) Structure

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$. Ses propriétés prolongent celles de $\mathbb{Q}$.
Il est muni :

- d'une addition qui a les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{Q}$.
- d'une multiplication qui a les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{Q}$.
- d'une relation d'ordre total qui possède des propriétés complémentaires.

2) Valeur absolue

Définition : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \max(x, -x)$ donc $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ sinon.

On en rappelle quelques propriétés.

Propriétés : $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$|xy| = |x| \times |y| \text{ et par conséquent } |x^n| = |x|^n \text{ et } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \text{ (mais pas d'égalité en général)}$$

La valeur absolue est une distance sur $\mathbb{R}$: $|x-a|$ est la distance entre a et x.

Conséquences : Pour tous réels a et x, et tout réel positif r :

$$|x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[\qquad |x-a| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$$

L'appartenance à un intervalle est équivalente à une inégalité en valeurs absolues.

Exemple : $x \in [3,7] \Leftrightarrow |x-5| \leq 2$, plus généralement : $x \in [a,b] \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$.

3) Partie entière

L'ensemble des intervalles $[n,n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x < n+1$.

Définition : On appelle partie entière d'un réel *x* le plus grand entier inférieur ou égal à *x*. On le note $\mathrm{Ent}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. Donc par définition : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Ent}(x) \leq x < \mathrm{Ent}(x)+1$.

Plus précisément : $n = \mathrm{Ent}(x) \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq x < n+1$.

La partie entière d'un entier est lui-même : $x = \mathrm{Ent}(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

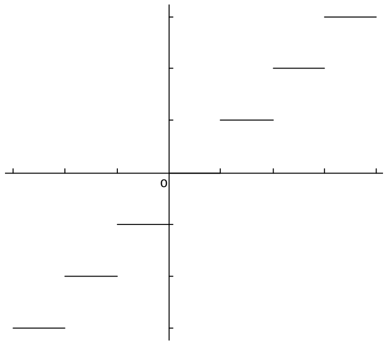
D'après ce qui précède, sur chaque intervalle de la forme $[n,n+1[$ où n est un entier, on a l'inégalité :

$$\forall x \in [n,n+1[\quad n \leq x < n+1$$

Donc : $\forall x \in [n,n+1[\quad \mathrm{Ent}(x) = n$.

La fonction est donc constante sur chacun des intervalles $[n,n+1[$.

La fonction partie entière est une fonction en escalier croissante.



4) Borne supérieure et borne inférieure

Définition : On appelle borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants (s'il existe) : $M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon \leq x \end{cases}$

La borne supérieure n'appartient pas forcément à A (par exemple b est borne supérieure de $]a,b[$). Lorsqu'elle appartient à *A*, c'est le plus grand élément de *A*.

Définition : On appelle borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus grand des minorants (s'il existe) : $m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x \leq m + \varepsilon \end{cases}$

Le théorème suivant est le résultat essentiel dans les propriétés de $\mathbb{R}$.

Théorème : Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée possède une borne supérieure et toute partie non vide minorée possède une borne inférieure.

Ce théorème a évidemment des conséquences importantes pour les suites.

5) Conséquences pour les suites

Théorème de convergence monotone : Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée est convergente et toute suite décroissante minorée est convergente.

Démonstration : On suppose que la suite (u_n) est majorée : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq M$.

On note $A = \{u_n / n \in \mathbf{N}\}$. C'est une partie non vide ($u_0 \in A$), majorée par *M*.

Donc elle possède une borne supérieure *a*. Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad a - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq a$.

Or la suite est croissante. Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq a$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - a| \leq \varepsilon$. Donc (u_n) converge vers *a*.

Conséquence : Dans $\mathbb{R}$, deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Rappel : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante, et si $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Supposons (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
S'il existait un entier p tel que $v_p < u_p$, alors : $\forall n \geq p \quad v_n \leq v_p < u_p \leq u_n$, et donc on aurait $\forall n \geq p \quad 0 < u_p - v_p \leq u_n - v_n$, ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$. Donc, étant donnés les sens de variations des deux suites : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Donc la suite (u_n) est croissante majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0. Donc les deux suites sont convergentes et ont la même limite car $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

<u>Conséquence 1</u> : Tout réel est limite de deux suites adjacentes de rationnels : les valeurs décimales approchées par défaut et par excès.

<u>Démonstration</u> : On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \text{Ent}(10^n x)$, donc : $a_n \leq 10^n x < a_n + 1$.
On définit les suites : $u_n = \dfrac{a_n}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{a_n + 1}{10^n}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq x \leq v_n$.
Et : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{10^n} = 0$.
De plus, puisque $a_n \leq 10^n x \leq a_n + 1$, on a $10a_n \leq 10^{n+1} x < 10a_n + 10$.
Or $a_{n+1} = \text{Ent}(10^{n+1} x)$ est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1} x$. Donc : $10a_n \leq a_{n+1}$ et $a_{n+1} + 1 \leq 10a_n + 10$. Donc : $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.
On obtient ainsi deux suites adjacentes donc convergentes vers la même limite qui est égale à x car : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq x \leq v_n$.
<u>Rappel</u> : Si a est un réel et n un entier, on appelle racine $n^{\text{ème}}$ de a toute solution de l'équation $x^n = a$.

<u>Conséquence 2</u> : Tout réel positif possède une unique racine $n^{\text{ème}}$ positive notée $\sqrt[n]{a}$

<u>Démonstration</u> : Soit $a \geq 0$.
Tout d'abord, il y a unicité car s'il y a deux solutions b et c, on aurait $b^n = c^n = a$. Or si on avait $b < c$, alors on aurait $b^n < c^n$, et si on avait $c < b$, alors on aurait $c^n < b^n$. Donc on a $b = c$, et donc il y a unicité. Montrons l'existence.
On considère $A = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, x^n \leq a\right\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car elle contient 0.
Elle est majorée. En effet, si $a \geq 1$, on a $a \leq a^n$, donc $\forall x \in A \quad x^n \leq a^n$, donc $x \leq a$ car en raisonnant par l'absurde, si on avait $x > a$, alors on aurait $x^n > a^n$. Et si $a < 1$, alors $\forall x \in A \quad x^n \leq 1$, donc $x \leq 1$ avec le même raisonnement.
Donc A possède une borne supérieure b.

- On suppose que $b^n > a$. Pour tout $x \in A$, on sait que $x \leq b$ car b majore A.
  Or : $b^n - x^n = (b - x)\sum\limits_{k=0}^{n-1} b^k x^{n-1-k}$, donc : $b^n - x^n \leq nb^{n-1}(b - x)$.
  De plus $x \in A$, donc $x^n \leq a$, donc : $b^n - a \leq b^n - x^n \leq nb^{n-1}(b - x)$.
  Donc : $\forall x \in A \quad x \leq b - \dfrac{b^n - a}{nb^{n-1}}$. Donc $b - \dfrac{b^n - a}{nb^{n-1}}$ est un majorant de A.
  Or il est plus petit que b. Donc c'est impossible.
- On suppose que $b^n < a$. On va montrer qu'il existe un élément de A plus grand que b, donc de la forme $b + \varepsilon$. Soit un réel ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1$.

D'après la formule du binôme : $(b+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k\varepsilon^{n-k} = b^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b^k\varepsilon^{n-k}$.

Or : $0<\varepsilon\le 1$, donc : $\varepsilon^{n-k}\le\varepsilon$. Donc : $(b+\varepsilon)^n \le b^n + \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b^k \le b^n+\varepsilon(1+b)^n$.

Donc pour que $(b+\varepsilon)^n\le a$, il suffit que $\varepsilon\le\dfrac{a-b^n}{(1+b)^n}$, et toujours $0<\varepsilon\le 1$.

Il suffit donc de prendre $\varepsilon = \mathrm{Min}\left(1,\dfrac{a-b^n}{(1+b)^n}\right)$ et on obtient un élément de A plus grand que b, ce qui est impossible.

Donc $b^n = a$. Donc b est l'unique racine $n^{\text{ème}}$ de a.

VI – Ensemble des nombres complexes

1) Structure et forme algébrique

L'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. Ses propriétés prolongent celles de $\mathbb{R}$. Il est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$. Mais il contient un élément noté i tel que $i^2=-1$. A cause de cela, il n'est pas muni d'une relation d'ordre compatible avec les opérations.

Tout nombre complexe z s'écrit de manière <u>unique</u> sous la forme $z = x+iy$ où x et y sont deux réels : $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$. Donc : $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\end{cases}$.

Si $\mathrm{Im}(z)=0$, alors z est réel. Si $\mathrm{Re}(z)=0$, alors z est imaginaire pur.

Cela se traduit par : $x+iy = x'+iy' \Leftrightarrow \begin{cases}x=x'\\ y=y'\end{cases}$ **<u>si</u>** $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$.

Les calculs dans $\mathbb{C}$ s'écrivent simplement en utilisant $i^2=-1$, puis en rassemblant partie réelle et partie imaginaire.

<u>Exemple</u> : $(3-2i)(2+5i) = 6-4i+15i+10 = 16+11i$.

$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. $\qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. $\qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. $\qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Plus généralement : $a^n-b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^k$.

<u>Formule du binôme de Newton</u> : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

où les coefficients $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ sont les combinaisons que l'on peut calculer par le triangle de Pascal et qui vérifient les propriétés :

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} \text{ si } 1\le k\le n.$$

<u>Exemple</u> : $(3-2i)^3 = 27-54i-36+8i = -9-46i$.

On appelle nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

<u>Propriétés</u> : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\quad \overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$

A l'aide de z et de son conjugué, on peut exprimer les parties réelles et imaginaires.

Pour tout nombre complexe z : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. Donc :

- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

2) <u>Rappels de trigonométrie</u>

Si le plan a pour repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, à tout réel θ, on peut faire correspondre un unique point M du cercle trigonométrique tel que θ soit une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On définit alors les lignes trigonométriques :

- $\cos\theta$ est l'abscisse du point M. Donc : $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$.
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point M. Donc : $\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \quad (\pi)$.
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ si $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad (\pi)$ et $\mathrm{cotan}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ si $\theta \not\equiv 0 \quad (\pi)$.

Les fonctions sinus et cosinus ont une période 2π et vérifient : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Les fonctions tangente et cotangente ont une période π et, sous réserve d'existence, vérifient : $\mathrm{cotan}\,\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

Les lignes trigonométriques usuelles sont :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\mathrm{cotan}\,\theta$		$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

Les symétries permettent de calculer d'autres lignes trigonométriques (toujours sous réserve d'existence de la tangente) :

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	(symétrie / Ox)
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$	(symétrie / Oy)
$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$	(symétrie / O)
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathrm{cotan}\,\theta$	(symétrie 1ère biss)
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\mathrm{cotan}\,\theta$	(symétrie 2ème biss)

On peut d'ailleurs les retrouver avec les formules suivantes :

Formules d'addition : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

En appliquant les formules pour $b=a$, on obtient :

Formules de duplication : $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

On peut ainsi transformer des produits en sommes :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \qquad \cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2a)$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)] \qquad \sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \qquad \sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$$

Inversement, on peut aussi transformer des sommes en produits :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

3) <u>Interprétation géométrique des complexes et forme trigonométrique</u>

Si le plan a pour repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, à tout point $M(x,y)$ on associe un unique complexe $z=x+iy$ appelé affixe du point *M* ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

La somme de deux complexes s'interprète alors comme somme de deux vecteurs.
La multiplication par un réel s'interprète comme la multiplication d'un vecteur par un réel. Mais c'est plus compliqué pour la multiplication par un complexe non réel (similitude). L'application $z\mapsto\overline{z}$ s'interprète comme symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

On appelle module du nombre complexe $z=x+iy$ le réel $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Géométriquement, c'est la distance OM. Donc $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

Propriétés : $|zz'|=|z|\times|z'|$ $\quad |z^n|=|z|^n$ $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ $\quad |z+z'|\le|z|+|z'|$ $\quad |z|=|\overline{z}|$

Si *z* est réel, son module est sa valeur absolue.
On note *U* l'ensemble des nombres complexes de module 1. L'ensemble des points *M* du plan dont l'affixe appartient à *U* est le cercle trigonométrique. Ils sont donc repérés par l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$: il existe un réel θ tel que *M* ait pour coordonnées $(\cos\theta,\sin\theta)$, donc pour affixe $\cos\theta+i\sin\theta$. Le réel θ est unique à $2k\pi$ près.

La fonction φ définie par : $\varphi(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ vérifie $\varphi(\theta+\theta')=\varphi(\theta)+\varphi(\theta')$ d'après les formules d'addition. C'est une propriété analogue à la propriété caractéristique des exponentielles réelles.

<u>Notation exponentielle</u> : $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$.

<u>Propriétés</u> : $e^{i0}=1$ $\quad e^{i\pi}=-1$ $\quad e^{2i\pi}=1$ $\quad e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}=\overline{e^{i\theta}}$

<u>Formules d'Euler</u> : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\quad \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

<u>Formule de Moivre</u> : $\forall n\in\mathbb{Z}\quad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Les formules d'Euler correspondent à l'expression des parties réelles et imaginaires.
La formule de Moivre se démontre par récurrence sur $\mathbb{N}$, puis sur $(-\mathbb{N})$.

On peut remarquer que si $z\neq 0$, alors $\left|\dfrac{z}{|z|}\right|=1$. Donc il existe un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|}=e^{i\theta}$, donc tel que $z=|z|e^{i\theta}$. On peut remarquer que θ est une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{Om})$ où m est le point d'affixe $\dfrac{z}{|z|}$, mais aussi de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ car $|z|>0$.

Si $z\neq 0$, on appelle Argument de z, noté l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z.
On appelle argument de z toute mesure θ de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$. Il y en a donc une infinité : tous ces réels sont congrus modulo 2π. Par abus d'écriture, on note $\arg(z)$.
Il en existe un et un seul dans $]-\pi,\pi]$, appelé argument principal.

<u>Propriétés</u> : $\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')\quad(2\pi)$ $\qquad \arg(z^n)\equiv n\arg(z)\quad(2\pi)$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\quad(2\pi)$ $\qquad \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\quad(2\pi)$

$\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)\quad(2\pi)$ $\qquad \arg(\overline{z})\equiv-\arg(z)\quad(2\pi)$

Les propriétés précédentes sont vraies pour tous les arguments, mais il n'y a pas de propriétés spécifiques pour les arguments principaux.

Tout nombre complexe <u>non nul</u> s'écrit sous forme trigonométrique ou exponentielle : $z=re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel. Le réel r est unique : $r=|z|$.
Mais le réel θ ne l'est pas : θ est <u>un</u> argument de z, donc toutes les solutions sont congrues modulo 2π. Donc $z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}r=r'\\ \theta\equiv\theta'\quad(2\pi)\end{cases}$.

La notation $\theta\equiv\theta'\quad(2\pi)$ signifie que : $\exists k\in\mathbb{Z}\quad\theta=\theta'+2k\pi$.

4) <u>Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe</u>

<u>Définition</u> : Si n est un entier $(n\geq 2)$, on appelle racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe Z toute solution de l'équation $z^n=Z$.

Si $Z=0$, il y a une unique solution $z=0$.

Si $Z\neq 0$, alors Z admet une forme trigonométrique : $Z=Re^{i\theta}$. On cherche alors les solutions de l'équation $z^n=Z$ sous forme trigonométrique : $z=re^{i\varphi}$.

Or $z^n=r^ne^{in\varphi}$. Donc : $z^n=Z\Leftrightarrow\begin{cases}r^n=R\\ \exists k\in\mathbb{Z}\quad n\varphi\equiv\theta+2k\pi\end{cases}$.

L'équation $r^n = R$ admet une unique solution $r = \sqrt[n]{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

La seconde équation équivaut à : $\exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, donc a une infinité de solutions, mais comme $e^{2i\pi} = 1$, il n'y a que n valeurs distinctes pour $e^{i\varphi}$.

<u>Théorème</u> : Tout nombre complexe non nul $Z = Re^{i\theta}$ admet n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$.

Dans le cas particulier où $Z = 1$, on a : $R = 1$ et $\theta = 0$.

<u>Théorème</u> : Les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = (\omega_1)^k$.

La somme de toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

En effet : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1)^k = \frac{1-(\omega_1)^n}{1-\omega_1} = 0$ car $(\omega_1)^n = e^{2i\pi} = 1$.

<u>Exemple</u> : Les racines carrées de l'unité sont 1 et (-1).

Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les racines $4^{\text{èmes}}$ de l'unité sont 1, i, (-1) et $(-i)$.

<u>Théorème</u> : On obtient toutes les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe non nul $Z = Re^{i\theta}$ en multipliant l'une d'entre elles par les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Par exemple : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad z_k = z_0\omega_k = z_0(\omega_1)^k$. Leur somme est nulle.

<u>Exemple</u> : Déterminer les racines cubiques de $(-i)$. On sait que $i^3 = -i$. Donc l'une des racines cubiques de $(-i)$ est i. Donc les trois racines cubiques de $(-i)$ sont i, $ij = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ et $ij^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$.

5) <u>Equations du second degré dans le corps des complexes</u>

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes et $a \neq 0$.

Cette équation équivaut à : $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

On définit comme dans $\mathbb{R}$ le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une seule solution « double » : $z = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta \neq 0$, alors Δ admet deux racines carrées distinctes δ et $(-\delta)$. Donc l'équation admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

La détermination de δ ne se fait pas toujours sous forme trigonométrique, mais souvent sous forme algébrique, ou du moins en combinant les deux.

<u>Exemple</u> : Résoudre l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z + 4 + 8i = 0$.

$\Delta = (1+i)^2 - 4(4+8i) = -16 - 30i$. On cherche deux réels a et b tels que $\delta = a + ib$.

$\delta^2 = \Delta$ équivaut à $\begin{cases} \ddot{a}^2 - b^2 = -16 \\ 2ab = -30 \end{cases}$, mais on a aussi $|\delta|^2 = |\Delta|$.

Donc $a^2+b^2=\sqrt{16^2+30^2}=34$. Donc : $\begin{cases} \ddot{a}^2-b^2=-16 \\ \ddot{a}^2+b^2=34 \\ ab=-15 \end{cases}$. On obtient $\begin{cases} \ddot{a}^2=9 \\ b^2=25 \\ ab=-15 \end{cases}$.

Les solutions sont donc $\begin{cases} \ddot{a}=3 \\ b=-5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \ddot{a}=-3 \\ b=5 \end{cases}$. Donc $\delta=3-5i$.

Les solutions de (E) sont : $z_1=\dfrac{1+i-3+5i}{2}=-1+2i$ et $z_2=\dfrac{1+i+3-5i}{2}=2-2i$.