Triangle de Pascal [cb04] - Exercice

Karine Zampieri, Stéphane Rivière

Unisciel algoprog Université Haute-Alsace

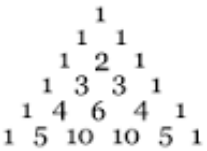
Version 21 mai 2018

Table des matières

Python - Triangle de Pascal (Solution)

Mots-Clés Combinatoire ■
Requis Axiomatique impérative (sauf Fichiers) ■
Optionnel Structuration de l'information, Graphique ■
Difficulté ● ● ○

Objectif
Cet exercice calcule les coefficients binomiaux grâce à la méthode du triangle de Pascal. Ces coefficients sont ensuite affichés en fonction de leur parité.



1 Triangle arithmétique de Pascal

Définition

Les **coefficients binomiaux**, ou encore *nombres de* PASCAL, sont les coefficients du polynôme $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = 1 + \ldots + \binom{n}{k} x^k + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

avec $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Propriété

Les coefficients binomiaux se calculent directement par (la définition) :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ils peuvent aussi se calculer de façon récurrente à partir des coefficients du binôme précédent $(1+x)^{n-1}$ par la relation :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Ce calcul se fait alors en construisant le **triangle arithmétique de Pascal** ou *tableau binomial*.

Construction du triangle de Pascal

Ce tableau, inventé par BLAISE PASCAL (1623-1662), était déjà connu en Chine.

- Commencez avec 1.
- Ajoutez 1 au début et à la fin de chaque ligne.
- Tous les autres éléments du triangle de PASCAL s'obtiennent en faisant la somme de deux nombres adjacents dans la ligne juste au-dessus.

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5			←	= 10	= 5	1

Calculez la ligne $n = 5$.

Solution simple
On applique la méthode :

```
1 5(=1+4) 10(=4+6) 10(=6+4) 5(=4+1) 1
```

Les coefficients d'une ligne étant stockés dans un tableau, calculez la ligne $n = 6$ avec les données de la ligne 5, en mémorisant les résultats dans le même tableau. (Aide : Comment avez-vous procéder pour ne pas écraser les anciens coefficients avant de vous en servir ?)

Solution simple
Si on calcule les éléments de la gauche vers la droite on obtient :

```
1 6(=1+5) 16(=6+10)...
```

Comme il faut la valeur de l'élément à gauche, il faut calculer les éléments de la droite vers la gauche, d'où :

```
1 6(=1+5) 15(=5+10) 20(=10+10) 15=(10+5) 6(=5+1) 1
```

2 Algorithmique, Programmation / pgtpascal

2.1 Calcul et affichage

Ce problème calcule et affiche les lignes du triangle de Pascal au fur et à mesure en stockant les coefficients binomiaux d'une ligne dans un tableau.

Définissez la constante entière `TMAX=100` (nombre maximal de coefficients d'une ligne) puis le type `Ligne`, structure contenant :

- Un entier `n` du numéro de la ligne.
- Un tableau `coefs`, d'au plus `TMAX` entiers indicé à partir de zéro, mémorisant les coefficients.

Écrivez une procédure `initialiserLigne(t)` qui initialise une `Ligne t`.

Aide simple
Initialisez l'entier `n` à -1.

Validez vos définitions avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
TMAX = 100
""" Taille maximale """
class Ligne:
    """ Représente une Ligne """
    def __init__(self):
        self.n = 0
        """ dimension de coefs """
        self.coefs = [0 for x in range(TMAX)]
        """ tableau des coefficients """
```

```
def initialiserLigne(t):
    """  Initialise une Ligne

     :param t: une Ligne
    """
    t.n = -1
```

Écrivez une procédure `premiereLigne(t)` qui initialise une `Ligne t` à la première ligne ($n = 0$) du triangle de Pascal.

Aide simple

Initialisez `n` à 0 et `coefs[n]` (donc `coefs[0]`) à 1.

Écrivez une procédure `ligneSuivante(t)` qui modifie une `Ligne t` en la ligne suivante du triangle de Pascal.

Aide simple

Voir dernière question du problème [Le triangle arithmétique de Pascal].

Aide détaillée

Incrémentez `n`, initialisez `coefs[n]` à 1, puis réalisez le calcul des coefficients de la **droite vers la gauche** (c-à-d. par indice décroissant `j` de `n-1` vers 1) et non pas le parcours classique de la gauche vers la droite (indice croissant). Notez qu'il est inutile d'initialiser la première case de `coefs` à 1, puisqu'elle contient déjà cette valeur.

Écrivez une procédure `afficherCoefs(t)` qui affiche une `Ligne t` du triangle de Pascal.

Aide simple

Attention, ici :

- Sur la ligne 0 : il y a un coefficient
- Sur la ligne 1 : deux coefficients
- etc.

Validez vos procédures avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def premiereLigne(t):
    """  Initialise la première Ligne du triangle de Pascal

     :param t: une Ligne
    """
    t.n = 0
    t.coefs[t.n] = 1
```

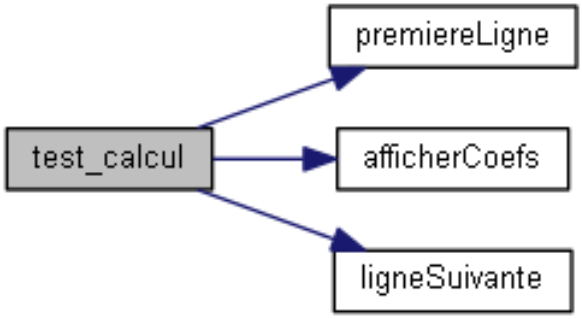
```
def ligneSuivante(t):
    """  Passe à la Ligne suivante

     :param t: une Ligne
    """
    t.n += 1
    t.coefs[t.n] = 1
    for j in range(t.n - 1, 1-1, -1):
        t.coefs[j] += t.coefs[j - 1]
```

```
def afficherCoefs(t):
    """  Affiche les coefficients du triangle de Pascal

     :param t: une Ligne
    """
    for j in range(0, t.n+1):
        print(t.coefs[j], " ", sep="", end="")
    print()
```

Écrivez une procédure `test_calcul` qui demande jusqu'à quelle ligne il faut afficher le triangle de Pascal puis calcule et affiche chaque ligne du triangle de Pascal jusqu'à cette ligne.



Testez. Exemple d'exécution :

```
Triangle de Pascal jusqu'à la ligne? 6
1
1 1
1 2 1
```

```
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
```

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def test_calcul():
    """ @test """
    nb = int(input("Triangle de Pascal jusqu'a la ligne? "))
    t = Ligne()
    initialiserLigne(t)
    premiereLigne(t)
    afficherCoefs(t)
    for j in range(1, nb+1):
        ligneSuivante(t)
        afficherCoefs(t)
```

Exécutez votre script et tapez des valeurs de plus en plus élevées de `nb`. Que constatez-vous ? Pourquoi ?

2.2 Affichage de la parité

Ce problème affiche le triangle de Pascal sous forme graphique (ici avec des caractères) en n'affichant non plus la valeur des coefficients mais leur parité.

Écrivez une procédure `afficherParite(t)` qui affiche une `Ligne t` du triangle de Pascal de la façon suivante : pour chaque coefficient `coefs[j]` de `t`, affichez le caractère `'X'` si le coefficient est impair, le caractère point `'.'` ou espace `' '` (au choix) sinon.

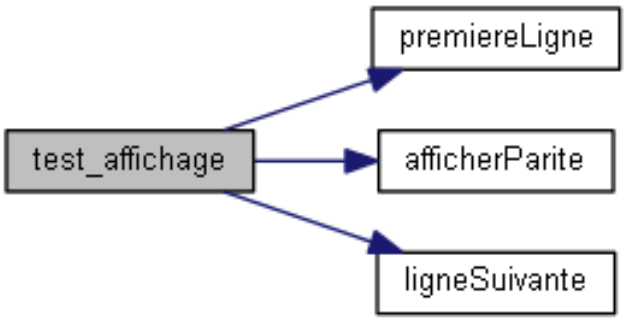
Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def afficherParite(t):
    """  Affiche les coefficients du triangle de Pascal

     :param t: une Ligne
    """
    for j in range(0, t.n+1):
        print(("X" if t.coefs[j] % 2 == 1 else "."), end="")
    print()
```

Copiez/collez la procédure `test_calcul` en la procédure `test_affichage` puis modifiez-la pour afficher les coefficients avec la procédure `afficherParite`.



Testez. Exemple d'exécution :

```
Triangle de Pascal jusqu'à la ligne? 6
X
XX
X.X
XXXX
X...X
XX..XX
X.X.X.X
```

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```python
def test_affichage():
    """ @test """
    nb = int(input("Triangle de Pascal jusqu'a la ligne? "))
    t = Ligne()
    initialiserLigne(t)
    premiereLigne(t)
    afficherParite(t)
    for j in range(1, nb+1):
        ligneSuivante(t)
        afficherParite(t)
```

2.3 Calcul réduit

Comme vous avez pu le constater, la taille des coefficients dépasse rapidement la taille des entiers machine. Or on souhaite réaliser l'affichage graphique sur des triangles plus grands. Ce qui nous intéresse pour cet affichage, ce n'est pas la valeur des coefficients mais seulement leur parité. On remplace alors chaque coefficient par 1 s'il est impair, par 0 s'il est pair.

Écrivez une procédure `ligneParitéSuivante(t)` qui modifie une `Ligne t` en la ligne suivante du triangle de Pascal, les coefficients de `t` étant sous la forme 0/1 (pair/impair).

Aide simple

Étant donnés deux coefficients, on peut savoir en fonction de leur parité si leur somme est paire ou impaire.

Aide détaillée

Si la somme `coefs[j]+coefs[j-1]` vaut 1, affectez 1 à `coefs[j]`, 0 sinon (cas où la somme vaut 0 ou 2).

A-t-on besoin d'écrire une procédure `premiereLigneParite(t,n)` ou bien peut-on utiliser la procédure `premiereLigne` dans la nouvelle représentation de `t` ?

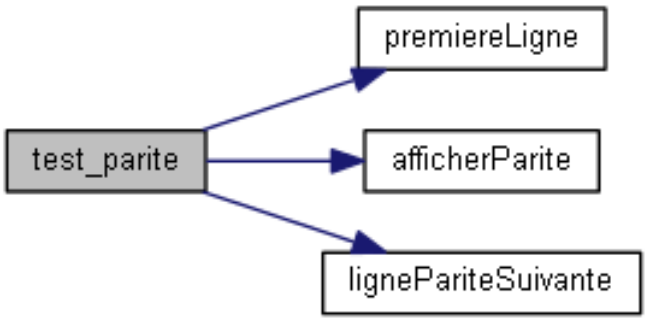
Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def ligneParitéSuivante(t):
    """  Passe à la Ligne suivante

     :param t: une Ligne
    """
    t.n += 1
    t.coefs[t.n] = 1
    for j in range(t.n - 1, 1-1, -1):
        t.coefs[j] = (1 if t.coefs[j] + t.coefs[j - 1] == 1 else 0)
```

Écrivez une procédure `test_parite` qui fait comme la procédure `test_affichage` le calcul et l'affichage du triangle de Pascal sous forme graphique mais en ne calculant que la parité des coefficients.



Testez. Exemple d'exécution :

```
Triangle de Pascal jusqu'à la ligne? 6
X
XX
X.X
XXXX
X...X
XX..XX
X.X.X.X
```

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```python
def test_parite():
    """ @test """
    nb = int(input("Triangle de Pascal jusqu'a la ligne? "))
    t = Ligne()
    initialiserLigne(t)
    premiereLigne(t)
    afficherParite(t)
    for j in range(1, nb+1):
        lignePariteSuivante(t)
        afficherParite(t)
```

2.4 Vrai calcul réduit

Ne souhaitant calculer que la parité des coefficients, on représente la parité par un booléen : `Vrai` si le coefficient est pair, `Faux` sinon. **Attention,** dans le problème précédent, 0 est associé à pair et 1 à impair.

	Vrai 0 (pair)	Faux 1 (impair)	= coef t[j]
0 (pair) Vrai	0 (pair) Vrai	1 (impair) Faux	
1 (impair) Faux	1 (impair) Faux	0 (pair) Vrai	

= coef t[j-1]

Définissez le type `LigneParite`, structure contenant le numéro `n` (entier) de la ligne ainsi qu'un tableau `coefs` d'au plus `TMAX` booléens, indicé à partir de zéro, qui stockera la parité des coefficients d'une ligne de parité du triangle de Pascal.

Écrivez une procédure `initialiserLigneParite(t)` qui initialise une `LigneParite t`.

Validez votre définition et procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
class LigneParite:
    """ Représente une LigneParite """
    def __init__(self):
        self.n = 0
        """ taille de coefs """
        self.coefs = [False for x in range(TMAX)]
        """ Les coefficients """
```

```
def initialiserLigneParite(t):
    """  Initialise une LigneParite

     :param t: une LigneParite
    """
    t.n = -1
```

Écrivez une procédure `premiereLigneParite(t)` qui initialise une `LigneParite t` à la première ligne de parité du triangle de Pascal. Pour cela, dupliquez la procédure `premiereLigne` puis modifiez-la afin de tenir compte de la nouvelle représentation.

Écrivez une procédure `ligneParitéSuivante2(t)` qui modifie une `LigneParite t` en la ligne de parité suivante du triangle de Pascal.

Aide simple

Dupliquez la procédure `ligneParitéSuivante` puis modifiez-la afin de tenir compte de la nouvelle représentation.

Écrivez une procédure `afficherParite2(t)` qui affiche une `LigneParite t` du triangle de Pascal de la façon suivante : pour chaque coefficient `coefs[j]` de `t`, affichez le caractère `'X'` si le coefficient est **pair**, le caractère point `'.'` ou espace `' '` sinon.

Aide simple

Dupliquez la procédure `afficherParite` puis modifiez-la afin de tenir compte de la nouvelle représentation.

Validez vos procédures avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def premiereLigneParite(t):
    """  Initialise la première LigneParite du triangle de Pascal

     :param t: une LigneParite
```

```
    """
    t.n = 0
    t.coefs[t.n] = False
```

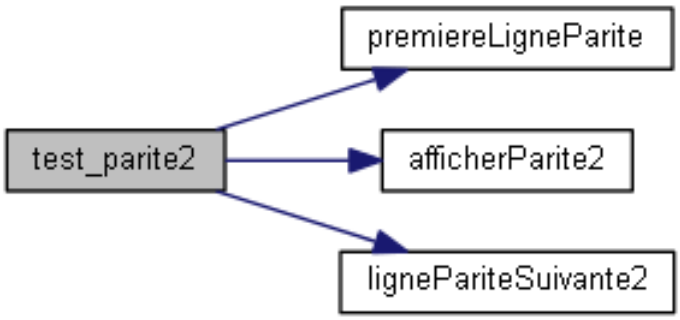
```
def lignePariteSuivante2(t):
    """  Passe à la LigneParite suivante

     :param t: une LigneParite
    """
    t.n += 1
    t.coefs[t.n] = False
    for j in range(t.n - 1, 1-1, -1):
        t.coefs[j] = (t.coefs[j] == t.coefs[j - 1])
```

```
def afficherParite2(t):
    """  Affiche les coefficients du triangle de Pascal

     :param t: une LigneParite
    """
    for j in range(0, t.n+1):
        print(("X" if not t.coefs[j] else "."), end="")
    print()
```

Écrivez une procédure `test_parite2` similaire à la procédure `test_parite` qui fait le calcul et l'affichage du triangle de PASCAL sous forme graphique en tenant compte de la nouvelle représentation.



Testez. Exemple d'exécution :

```
Triangle de Pascal jusqu'à la ligne? 6
X
XX
X.X
XXXX
X...X
XX..XX
X.X.X.X
```

Testez avec de grandes valeurs de `nb` (par exemple 60, @[rstpascal4b.txt]).

Commentaires
Remarquez la régularité. Le dessin obtenu ressemble beaucoup à un dessin bien connu que les mathématiciens appellent le **triangle de Sierpinski** (du nom de son inventeur). (http://www.mathcurve.com/fractals/sierpinski/sierpinskitriangle.shtml)

Validez votre procédure avec la solution.

Solution Python @[pgtpascal.py]

```
def test_parite2():
    """ @test """
    nb = int(input("Triangle de Pascal jusqu'a la ligne? "))
    t = LigneParite()
    initialiserLigneParite(t)
    premiereLigneParite(t)
    afficherParite2(t)
    for j in range(1, nb+1):
        ligneParite Suivante2(t)
        afficherParite2(t)
```

3 Optionnel

3.1 Mode graphique

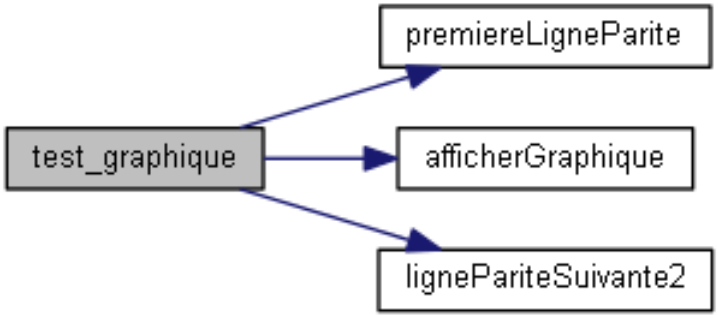
Mode standard
Il y a renversement des axes : le point (0,0) se trouve dans le coin supérieur gauche.

3.2 Vrai affichage graphique

Ce problème utilise la bibliothèque graphique pour afficher le triangle de Pascal sous forme graphique (un pixel par coefficient).

Validez votre procédure avec la solution.

Écrivez une procédure `test_graphique` qui fait comme la procédure `test_parite2` le calcul et l'affichage du triangle de Pascal mais sur l'écran graphique.



Modifiez `TMAX` en 800 ou 1000.

Testez (ici `nb=600`). Exemple d'exécution :

Validez votre procédure avec la solution.

4 Compléments

Ce problème utilise les propriétés des coefficients binomiaux afin de réaliser quelques optimisations de calcul.

Le tableau est symétrique : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5 Références générales

Comprend ■